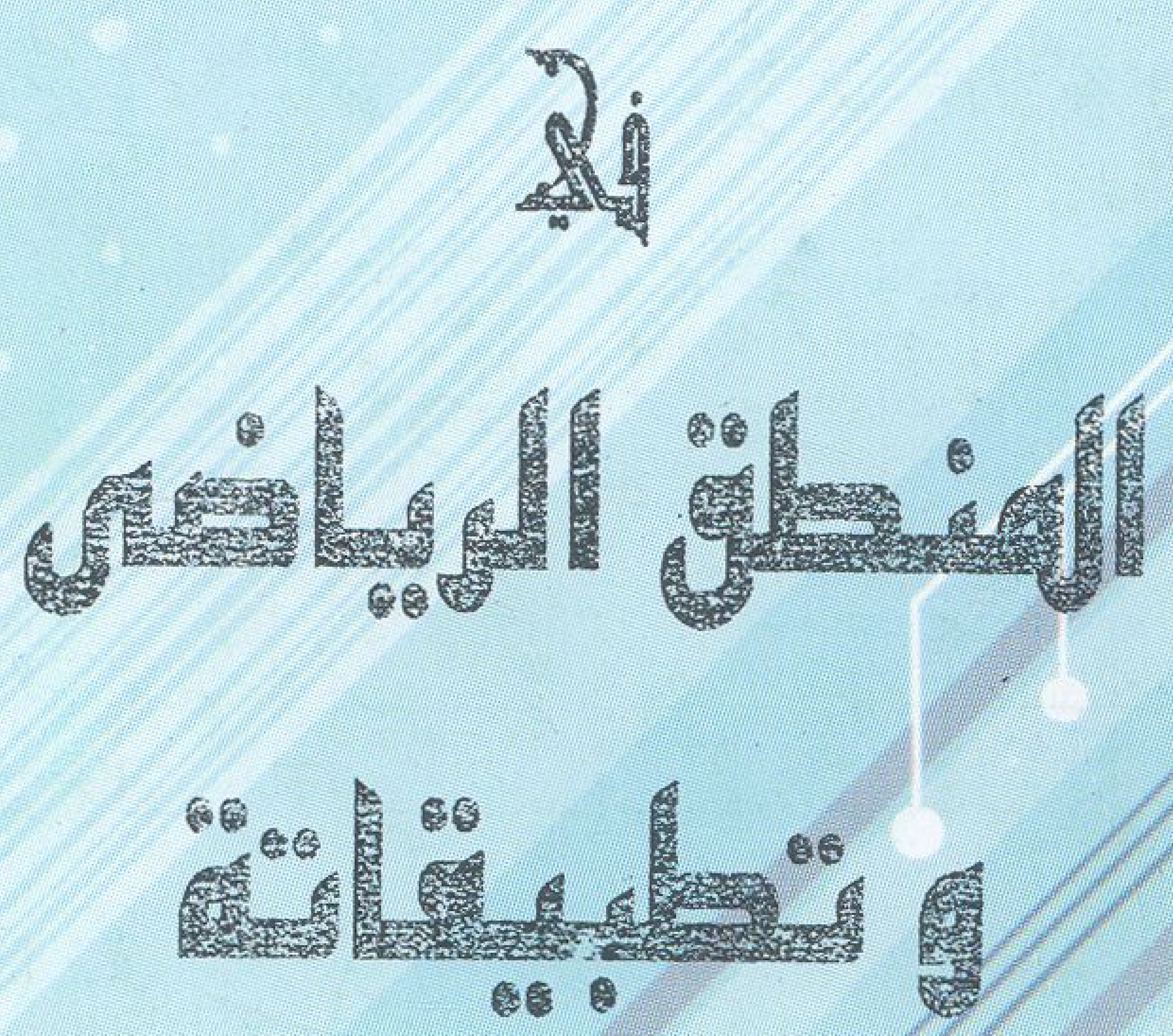
سلسلة النقب الثقافية

في الرياضيات





إعداد: محمود عبد الله سليمان

سلسلة النقب الثقافية

جزء 7

المنطق الرياضي وتطبيقاته

إعداد: محمود عبد الله سليمان
موجه أول رياضيات

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله .. لا يحيط بشئ من علمه إلا بما شاء

سبحانه .. أحصى كل شئ بعلمه ،

سبحانه .. ذى المن والفضل .

أسأله أن يتقبل ما تحمله كلمات تلك الصفحات العامات أن تجعل كل ما نكتب خالصا لك ، وأن يوضع فى ميزان أعمالنا فى الآخرة .

هذا هو الجزء السابع من سلسلة النقيب الثقافية والتى أتمنى من الله أن يوفقنى ويعيننى على أن أكمل الأجزاء الأخرى منها .

وكان وراء فكرة إعداد هذه السلسلة الخوف من ضياع الجهود المضنية والتى كادت أن تستغرق وقتى كاملا فى البحث والتنقيب فى علوم الرياضيات والحاسب دون أن تؤدى أغلبها النفع لغيرى .

وكان لكتاب "الدوال الحقيقية" والصادر فى عام ١٩٨٧ بالكويت التوجيه بهذه الجهود إلى الأمل فى نفع الغير ، ثم تبعه سلسلة "الدليل" المنهجية فى رياضيات المرحلة الثانوية ، وأحسب أنها قد حققت النفع لأبنائنا الطلاب ، والعون لعديد من المعلمين .

ولما كان هناك الكثير من الموضوعات المنهجية والثقافية لم يرى النور رأيت أن أصدر المناسب منها فى إطار "سلسلة النقيب الثقافية" وامتثالا لنصيحتى ؛ قول سيدنا "شعيب" لأهل "مدين" فى "سورة هود"

بسم الله الرحمن الرحيم

" قَالَ يَٰقَوْمِ أَرَءَيْتُمْ إِن كُنتُ عَلَىٰ بَيِّنَةٍ مِّن رَّبِّي وَرَزَقَنِي مِنْهُ رِزْقًا حَسَنًا ۚ وَمَا أُرِيدُ أَنْ أُخَالِفَكُمْ إِلَىٰ مَا أَنْهَاكُمْ عَنْهُ ۚ إِنْ أُرِيدُ إِلَّا الْإِصْلَاحَ مَا اسْتَطَعْتُ ۚ وَمَا تَوْفِيقِي إِلَّا بِاللَّهِ ۚ عَلَيْهِ تَوَكَّلْتُ وَإِلَيْهِ أُنِيبُ (٨٨) " صدق الله العظيم

وحديث رسول الله (صلى الله عليه وسلم) : " إذا مات ابن آدم انقطع عمله إلا من ثلاث : صدقة جارية أو ولد صالح يدعو له أو علم ينتفع به "

وإصدار هذه السلسلة بخط يدى إنما مرده قناعتى الشخصية بحيوية الكتابة بخط اليد ، وسوف يعاد كتابتها إن شاء الله فى مرحلة تالية .

نظراً لأن المنطق لم يعد علماً نظرياً كما كان في الماضي، ففي هذا العصر إحتل المنطق مكاناً بارزاً بين مختلف العلوم، وأصبحت تطبيقاته تشمل معظم العلوم.

فقد استخدم المنطق في دراسة الدوائر الكهربية والدوائر الإلكترونية وجهات التليفونات كما يعتبر عنصراً أساسياً في أداء عمل الحاسبات الإلكترونية، هذا فضلاً عن استخدامه في مجال علم النفس والاقتصاد.

لذا تعتبر دراسة المنطق - خاصة المنطق الرياضي - ضرورة هامة في هذا العصر خاصة لدارسي الرياضيات والمهتمين بها.

وقد خصصت مادة هذا الكتاب لعرض "المنطق الرياضي وتطبيقاته" على أن تستكمل بالكتاب التالي - الجزء الثامن - تحت عنوان "المنطق والبرهان الرياضي".

وهذا الكتاب "المنطق الرياضي وتطبيقاته" يشتمل على خمسة فصول:

- الفصول الثلاثة الأولى تعرضنا فيها للمنطق ونشأته، والمفاهيم الأساسية للمنطق الرياضي مثل التقارير (القضايا) والروابط والعلاقات المنطقية.
- الفصل الرابع تعرضنا فيه "للمنطق التام"، وكان واضحاً أن هذه الدراسة جعلت بعض المفاهيم الرياضية أكثر منطقية.
- أما الفصل الخامس فقد تعرضنا فيه لبعض تطبيقات المنطق مثل الدوائر الكهربية والجبر البولي والبوابات المنطقية.

والهدف من هذا الكتاب هو أن نوفر للقارئ أو الدارس - بمشيئة الله - أرضية راسخة في المنطق الرياضي وتطبيقاته والتي يمكنه فهمها في أي مستوى من مستويات الدراسة.

وقد روعي - قدر الإمكان - عند عرض مادة هذا الكتاب:

- أن تتضمن بين طياتها معظم المفاهيم الهامة والتي تتعلق بدراسة المنطق الرياضي وتطبيقاته.
- أن تكون الأمثلة المعروضة والتمارين المصاحبة بسيطة

في مختصرها حتى يتثنى للقارئ متابعة المفهوم المنطقي الذي نود توضيحه ، فالهدف من هذه الأمثلة والتمارين هو استخدامها كوسيلة لتوضيح المفهوم المنطقي .

— أن تكون طريقة العرض ذات طابع يجمع بين الدقة العلمية والبساطة والتسلسل المنطقي للمفاهيم .

وأخيراً من كل الرجاء من الله سبحانه وتعالى أن يحقق كل ما نكتب بعض ما نصبو إليه في حياتنا وبعد مماتنا

" " فهو الموفق والمستعان ؟

محمود عبدالله سليمان

بيت عمر

الإعداد في 1993 م.

الإصدار في 2010 م.

المحتوى

الصفحة

الصفحة

5

[1:1] المنطق ونشأته .
[2:1] المنطق واللغة .
[3:1] التعبير (العبارة - القضية)
[4:1] المنطق الرياضي .

الفصل 1

مبادئ المنطق

[1:1] المنطق ونشأته :

- تعتبر دراسة المنطق وسيلة وليست غاية في حد ذاتها ، حيث تمدنا دراسته بأسلوب التفكير السليم الذي يجب أن نتبعه في الحكم على الأشياء .
- تدل كلمة المنطق من ناحية الاشتقاق اللغوي على الكلام واللفظ ، غير أن هذه الكلمة في اليونانية تدل أيضاً على العقل أو الفكر أو البرهان . وقد استعمل هذا اللفظ بعدة معان أهمها : " المنطق هو العلم الباحث في المبادئ العامة للتفكير الصحيح " .
- ويعتبر أرسطو (384 - 322 ق.م) المؤسس الأول لعلم المنطق ، فقد ظهر على يديه المنطق كعلم له أسسه وقواعده ،

وظل المنطق الأرسطي بمبادئه الثلاثة المشهورة : مبدأ الذاتية ، مبدأ عدم التناقض ، مبدأ الثالث المرفوع وبمباحثه القياس دون تطور يذكر حتى عصر النهضة .

- وفي عصر النهضة كان من الطبيعي أن تقوم ثورة على هذا المنطق الأرسطي نتيجة للتطور الذي طرأ على العلوم الطبيعية والرياضية .

وقد بلغت هذه الثورة أشدها عند " ديكارت " و " بيكون " و " جاليليو " ، فقد رأى هؤلاء العلماء أن الفكر المجرد وحده غير قادر على اكتشاف الحقائق ، وإنما الفكر القائم على التجربة والاستقراء عند " بيكون " و " جاليليو " - والفكر القائم على العلاقات الرياضية والتصورات الخاصة

بالعدد والمقدار عند "ديكارت" هو الذي يؤدي بنا إلى اكتشاف الحقائق وتحصيل العلم.

ومن جهة أخرى تطورت الرياضيات، وبدأ العلماء يرون أن طريقة البرهنة فيها هي الطريقة المثلى، وأن البرهان هو عملية إنتقال الذهن من أشياء مسلم بصحتها إلى أخرى تستخلص منها بالضرورة، وأن العلم تبعاً لهذه الفكرة هو مجموعة من القضايا تستخلص من التعريفات والبديهيات والمعاملات. عندئذ نادى أصحاب الرياضيات وعلى رأسهم "ديكارت" باتباع هذا المنهج بدلاً من المنهج القياسي الأرسطي العقيم.

- ونظراً لما بين المنطق والرياضيات من التشابه في الغاية والطبيعة ما يجعل التزاوج بين الإثنين ممكناً ويسيراً. فكلا الوجهين من العلم يمتاز بأنه يميل إلى التجريد والإكتفاء بالصورة، ويمتازان كذلك بأنهما يتفقان في الغاية وهي الوصول إلى الربط الصحيح بين الأشياء عن طريق عمليات فكرية بسيطة تخضع لقواعد ثابتة وتتم بطريقة آلية. كان من الطبيعي إذن أن يفكر المعنيون بالمنطق في تطبيق المنهج الرياضي على المنطق، وبذلك تولدت حركة متبادلة بين المنطق وبين الرياضيات كانت نتيجتها ظهور ما يسمى "المنطق الرمزي" أو "المنطق الرياضي".

- ويعتبر العالم والفيلسوف "ليبنتز" (1646-1716 م) المكتشف الأول للمنطق الرياضي. حيث أقر بوجوب إنشاء منطق جديد يعد بمثابة علم منهجي شامل يقوم على أساس الرياضيات - إلا أنه - أي ليبنتز - لم يستطع أن يكون من هذا إلا الجزء الضئيل.

- وفي القرن الثامن عشر قامت محاولات عدة لاستكمال هذا المنطق الجديد إلا أنها كانت محاولات ناقصة.

- وفي القرن التاسع عشر قامت محاولات جديدة نحو إقامة هذا المنطق

الرياضي، وما أن انتصف القرن بدأ الشكل الحقيقي لنظرية المنطق الرياضي وأسسه الرئيسية. فقد قام الرياضيان الإنجليزيان «دي مورجان» و«بول» بوضع الأساس الحقيقي لهذا المنطق الرياضي، وبه أصبح المنطق أكثر رياضيًا، وأصبحت الرياضيات أكثر منطقية.

- وإذا كان «ليبنتز» يعد المكتشف الأول لهذا المنطق، فلا شك في أن «بول» يعتبر ثاني مكتشفيه، فقد استطاع في حرية تامة وبدون تأثر بالمنطق القديم - حيث أنه لم يعرف عنه شيئًا كثيرًا - أن يرسى قواعد المنطق الرياضي.
- وقد تتابعت بعد ذلك الأبحاث الخاصة بالمنطق الرياضي بسرعة كبيرة إلى أن قام العالمان «راسل» و«هوايتهد» بأضخم عمل في إقامة الهيكل شبه المتكامل للمنطق الرياضي وذلك في كتابهما المشترك «المبادئ الرياضية» والمكون من ثلاثة أجزاء في 2000 صفحة وذلك في الفترة (1910-1913 م). ففي هذا الكتاب ظهر المنطق الرياضي بأوضح صورة وتمام نضجه.
- وبعد ذلك قامت محاولات عديدة، إلا أنها لم تضف شيئًا ذا قيمة تعتد بها إلى النتائج التي وصل إليها «راسل» و«هوايتهد» فكل ما أتى بعد ذلك يعتبر بمثابة إضافات بسيطة أو تهذيبًا لما قام به هذان العالمان.

ففي سنة 1937 م. قام العالم «هيل» بتقديم معالجة للقضايا وفقًا لمعايير تختلف عن الصواب والخطأ مثل (أكثر صوابًا من...)، (أقل صوابًا من...)، (متساويان في الصواب) ويسمى هذا المنطق «بالمنطق التوبولوجي».

2:1 المنطق واللغة :

بما أن المنطق يبحث في الفكر، وبما أن اللغة - أي لغة - هي التي تعبر عن الفكر. إذن: كان على المنطق أن يعنى باللغة ويهتم بدراسة التركيبات الأساسية فيها.

ومن التركيبات اللغوية الهامة "الجملة"

والمنطق لا يبحث في الجمل على شمولها ولكنه يهتم بنوع معين من الجمل والتي تسمى في المنطق "بالتقارير" أو "القضايا" أو "العبارات".

وهذه الجمل - موضع الاهتمام - لابد أن تتفق والمبادئ الأساسية للفكر الاستدلالي، وهذه المبادئ هي:

I. مبدأ الهوية، وصيغته "الموجود هو ذاته" أو "ما هو موجود فهو موجود". ويعني هذا المبدأ أن كل قضية تبقى كما هي (صحيحة كانت أم خطأ) مهما تغيرت الأحوال التي تظهر فيها.

فمثلا إذا قلنا "مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي تساوي 360" فإن هذه القضية (العبارة) تبقى صائبة سواء أكان الشكل الرباعي شبه منحرف أو متوازي أضلاع أو غير ذلك لأن كل من هذه الأشكال هو شكل رباعي.

II. مبدأ عدم التناقض: وصيغته "يستحيل أن يوجد الشيء وأن لا يوجد في نفس الوقت ومن نفس الجهة"

وهذا المبدأ يعني أن: أي قضية لا يمكن أن تكون صائبة وخاطئة في نفس الوقت. فإذا سلمنا بأن قضية ما صائبة فإن نقيضها (نفيها) يكون قضية خاطئة - والعكس صحيح.

فمثلا: إذا قلنا أن "يتقاطع قطرا المضلع الرباعي في نقطة تقع داخله" وسلمنا بأن هذه القضية خاطئة فإن نقيضها: "لا يتقاطع قطرا المضلع الرباعي في نقطة تقع داخله" تكون صائبة.

III. مبدأ الثالث المرفوع : وصيغته " لا وسط بين الوجود واللاوجود"

ويعني هذا المبدأ أن أي قضية إما أن تنطوي على معنى صائب أو على معنى خاطئ وليس هنالك احتمال ثالث.

مثال إذا قلنا " ذهب زيد إلى المدرسة " ، هذه القضية من الجائز أن تكون صائبة أو خاطئة حسب واقع الحال. ولكن في دراستنا للمنطق علينا أن نسلم بصوابها أو بخطئها ولا غير ذلك.

أما البحث في صحة أو خطأ مثل هذه القضايا فهذا أمر آخر بعيداً عن قواعد المنطق.

- ولمعرفة نوع الجمل التي ستكون موضع إهتمامنا في المنطق نتذكر أولاً ما يأتي :

- الجملة في اللغة نوعان :

(أ) جملة خبرية : وهي التي تحوي خبراً معيناً.

(ب) جملة إنشائية : وهي التي لا تحوي خبراً معيناً.

- ومن أمثلة الجمل الخبرية :

1. الله لطيف بعباده.
2. 21 عدد يقبل القسمة على 3، 7.
3. 5 + 4 = 9
4. ألبرت اينشتين عالم عربي.
5. لكل عدد طبيعي معكوس جمعي.
6. 5 × 0 = 5
7. ذهب زيد إلى المكتبة.
8. المسافة المقطوعة = السرعة × الزمن.
9. س + ص = ع
10. ..... طالب مجتهد.

11. الأهلى سيفوز على الزمالك فى المباراة القادمة
12. سيكون الجو حاراً خلال الأسبوع القادم .
وبالتأمل فى الجمل الخبرية السابقة نلاحظ أنه:

- الجمل 1، 2، 3 : خبرية - صائبة
- الجمل 4، 5، 6 : خبرية - خاطئة .
- الجملتان 7، 8 : خبريتان - ومن الجائز صواب أو خطأ أى منهما حسب واقع الحال .
- الجملتان 9، 10 : خبريتان - ولانستطيع الحكم مباشرة على صواب أو خطأ أى منهما إلا بعد تحديد قيمتى المتغيرين س، ص أو ملئ الفراغ .
- الجملتان 11، 12 : خبريتان - ولانستطيع الجزم بصواب أى منهما تماما أو خطئها تماما ، بل علينا تحديد كل منهما ، بمعنى أنه يكون لكل منهما حالة وسط بين الصواب والخطأ .

- وتسمى الجمل الخبرية من 1 إلى 8 وأمثالها " تقارير " أو " عبارات " أو " قضايا " "Statements"
كما تسمى الجملتان 9، 10 وأمثالها " جمل مفتوحة ".

وبالنظر إلى الجمل الخبرية والتى اصطلحنا على تسميتها " بالتقارير " أو " بالعبارات " نرى أنها تتفق ومبادئ الفكر الأساسية السابقة حيث يتخطى الحكم بينها على الصواب كل الصواب أو الخطأ كل الخطأ وبالتالى فإن دراستنا للمنطق سوف تنصب على مثل هذه التقارير .
أما الجمل الخبرية أمثال الجملتان 11، 12 السابقتين فلا مجال لها فى المنطق وإنما يكون الحديث عنها فى مجال آخر " نظرية الاحتمال ".

- ومن أمثلة الجمل الإنشائية :

1. ارسم قطعة مستقيمة طولها ٣سم.
2. لا تعتمد على الصفر
3. ما هو المحايد الضربي على مجموعة الأعداد الحقيقية ؟
4. ما أجمل هذه الزهرة.
5. لعل الله يرحمنا.
6. ليت الشباب يعود يوما.
7. احترس !
8. إياك والاقتراب من النار.

- وبالتأمل في هذه الجمل الإنشائية نجد أنها تمثل الأمر والنهي والاستفهام والتعجب والتمني والترجي والتحذير على الترتيب وهذه الجمل وأمثالها لا يمكنه الحديث عن صواب أو خطأ أي منها وبالتالي فهي أيضا خارج دراستنا للمنطق.

3.1 التقرير (العبارة - القضية) Statment

التقرير هو جملة خبرية لها خاصية الصواب أو الخطأ وليس كليهما.

- وإذ ارتبط التقرير بكلمة صواب (True) سمي "تقريرا صائبًا"
- وإذا ارتبط التقرير بكلمة خطأ (False) سمي "تقريرا خاطئًا".
- ، وصواب التقرير أو خطئه يسمى " قيمة الصواب (الصدق) له".

وحسب التعريف السابق يكون لأي تقرير قيمة صدق واحدة ، وإذا علمت قيمة الصدق للتقرير سمي "تقريرًا معينًا" ، وإذا لم تكن معلومة (مثل التقارير التي تتحدد صوابها أو خطؤها حسب واقع الحال) سمي التقرير "تقريرًا غير معين"

- وتنقسم التقارير إلى :

• تقارير بسيطة   • تقارير مركبة.

• التقرير البسيط : هو العبارة التي تحمل خبراً واحداً .

• التقرير المركب : هو العبارة التي تحمل أكثر من خبراً واحداً .

- أمثلة :

1. $12 = 4 \times 3$ • تقرير صائب
2. $3 < 5$ • تقرير خاطئ
3. تطرا التطبيق متعامدان • تقرير خاطئ
4. ليبتنز هو المؤسس الأول لعلم المنطق الرياضي • تقرير صائب
5. المسافة المقطوعة = السرعة × الزمن • تقرير غير معيّن
6. نفي التقرير يكون خاطئاً . • تقرير غير معيّن
7. كونوا عباد الله إخواناً • ليس تقرير (جملة طلبية)
8. ما أجملك ! • ليس تقرير (جملة تعجبية)
9. في الليل • ليس تقرير (شبه جملة) .

- ومن أمثلة التقارير المركبة :

1. السماء صافية والشمس ساطعة .
2. $2 \times 3 = 6$ أو $2 + 3 = 6$.
3. ليس صحيحاً أن السماء تمطر ذهباً .
4. إذا كانت س = 2 فإن س² = 4
5. يكون الشكل الرباعي معيناً إذا وفقط إذا تساوى أطوال أضلاعه .

وتحديد قيمة الصدق لمثل هذه التقارير المركبة سيكون موضع اهتمامنا في البنود التالية

[أ-ب] المنطق الرياضي:

يعد المنطق الرياضي بمثابة علم مناهج شامل له نسقا رياضيا، فهو عبارة عن مجموعة من القواعد والأساليب التي تستخدم للحكم عما إذا كان استنتاج جملة خبرية (تقرير) من سابقاتها ممكنا أم لا - وهذا الحكم يتعلق فقط بالناحية الشكلية وليس بالمضمون.

مهما كانت الجمل الخبرية (صواب أو خطأ) المستخدمة، ومهما كان الاستنتاج المستند على المنطق مخالفا للبداهة والواقع فإن هذا الاستنتاج يكون صحيحا من حيث الشكل - لذا يطلق على المنطق أحيانا "المنطق الصوري" أو "المنطق الشكلي".

والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال: إذا سلمنا بأن: جميع الدول العربية تقع في قارة أفريقيا

، سوريا دولة عربية.

فإن الاستنتاج المنطقي هو: سوريا تقع في قارة أفريقيا.

- في هذا المثال نلاحظ أنه:

على الرغم من أن الجملة الأولى لا تتفق مع الواقع، حيث أن هناك دول عربية - مثل سوريا - لا تقع في قارة إفريقيا - إلا أن النتيجة: "سوريا تقع في قارة أفريقيا" تعتبر صحيحة من وجهة نظر المنطق مع أن هذه الجملة تنافي الواقع.

تمارين [1 : 1]

- عين التقارير (القضايا) من بين الجمل التالية، وبين قيمة الصواب لكل منها :

1. أينشتين مكتشف نظرية النسبية.
2. قطر المعين متعامدان.
3. إقرأ باسم ربك الذى خلق.
4. $0 \times 5 = 0 + 5$
5. لا تقولن لشئ إنى فاعل ذلك غداً إلا أن يشاء الله.
6. القدس مدينة عربية
7. لعلك تتعلم منها بخير.
8. $س^2 - ص^2 = (س - ص)(س + ص)$ لكل س، ص $\in$ ح
9. لا يكلف الله نفساً إلا وسعها.
10. يوجد عدد طبيعى س بحيث $\sqrt{س^2} = س$
11. $\sqrt{س^2} = س$ ، س $\in$ ح
12. مجموع قياسات الزوايا الداخلة لأى مثلث = ...°
13. فى السماء
14. وفى السماء رزقكم وما توعدون.
15. إذا كانت $س^2 = 4$ فإن $س = 2$
16. $\sqrt{2-} \times \sqrt{8-} = 4$
17. $\lim_{ن \to \infty} (1 + \frac{1}{ن})^ن = e$ حيث e الأساس الطبيعى للوغاريتمات
18. زيد طالب مجتهد.

- أكتب النتيجة المنطقية لكل من العبارات التالية :

19. كل العلماء عباقرة ، ليبنتز عالم
20. جميع الأعداد الأولية هى أعداد فردية ، 2 عدد أولى

[2 : 1] الروابط المنطقية
[2 : 2] جداول الصدق
[2 : 3] أنواع التقارير المركبة .

الفصل 2
الروابط المنطقية

[2 : 1] الروابط (العمليات) المنطقية :

تعتبر التقارير (القضايا) اللبنات الأولى التي تقوم عليها علم المنطق، ومن هذه التقارير يمكننا اشتقاق تقارير جديدة وذلك باستخدام روابط مستمدة من أدوات الربط في اللغة العربية ونعرفها تعريف منطقي محدد - وتسمى « بالروابط - أو العمليات - المنطقية ».

وهذه الروابط هي :

1. ليس صحيحا أنه .. .. ..
وهي رابط أحادي - وتسمى " أداة النفي ".

2. ... . و ....
وهي رابط ثنائي - وتسمى « أداة العطف ».

3. .. .. .. أو .. ..
وهي رابط ثنائي - وتسمى « أداة الفصل "

4. .. .. .. أو .. .. . وليس كليهما
وهي رابط ثنائي - وتسمى « أداة الفصل الحقيقي »

5. إذا .. .. فإنه .. .. ..
وهي رابط ثنائي - وتسمى « أداة الشرط »

6. ... ... إذا وفقط إذا ... ...
وهي رابط ثنائي - وتسمى « أداة الشرط المزدوج ».

- والتقرير الذي يشتمل على واحدة أو أكثر من أدوات الربط السابقة يسمى « تقريرا مركبا ».

أما إذا كان التقرير خاليا من أدوات الربط السابقة سمى "تقريرا بسيطا"

ومن أمثلة التقارير المركبة :

- ليس صحيحا أن الشمس مشرقة .
- الشمس مشرقة و السماء صافية .
- الشمس مشرقة أو السماء ملبدة بالغيوم .
- إما أن الشمس مشرقة أو السماء ملبدة بالغيوم وليس كليهما .
- إذا كانت السماء صافية فإن الشمس مشرقة .
- الشمس مشرقة إذا وفقط إذا كانت السماء صافية .

التعبير الرمزى للتقارير و الروابط المنطقية .

سنرمز للتقارير بالحروف الأبجدية أ ، ب ، جـ ، ... ، هـ ، ك ، ...

كما سنستخدم الرموز التالية لأدوات الربط - وهى رموز مستخدمة على نطاق عالمى رغم اختلاف اللغات .

1. ليس صحيحا أن .. .. يرمز لها بالرمز ~ .. .. .
2. ..... و .. .. .. يرمز لها بالرمز .. .. ∧ .. .. .
3. .. .. أو .. .. .. يرمز لها بالرمز .. .. ∨ .. .. .
4. .... أو .. .. وليس كليهما يرمز لها بالرمز ... $\underline{\vee}$ .. .. .
5. إذا ... فإن .. .. . يرمز لها بالرمز .. .. → .. .. .
6. .. .. .. إذا وفقط إذا .. .. يرمز لها بالرمز .. .. ↔ .. .. .

مثال : إذا كان الرمز أ يرمز للتقرير " زيد طالب ذكى "

والرمز ب يرمز للتقرير " ينام الليل "

فاكتب كلا من التقارير اللغوية التالية فى الصورة الرمزية :

(1) زيد ليس طالب ذكى .

(2) زيد طالب ذكي وينام الليل.
(3) زيد طالب ذكي أو ينام الليل.
(4) زيد طالب ذكي أو غبي.
(5) إذا كان زيد طالب ذكي فإنه ينام الليل.
(6) إذا كان زيد ينام الليل فإنه ليس ذكيا.
(7) زيد ينام الليل إذا وفقط إذا كان ذكيا.
(8) فقط إما زيد طالب ذكي أو أنه ينام الليل.
(9) إما زيد طالب ذكي أو ينام الليل وليس كليهما ولكنه غبيا
(10) ليس صحيحا أنه: إذا كان زيد ينام الليل فإنه يكون غبيا.

الحل:

(1) ~ أ
(2) أ ∧ ب
(3) أ ∨ ب
(4) أ ∧ ~ أ
(5) أ → ب
(6) ب → ~ أ
(7) أ ↔ ب
(8) أ ⊻ ب
(9) (أ ⊻ ب) ∧ ~ أ
(10) ~ (ب → أ)

مثال: إذا كان التقرير أ: "أمطرت السماء"
والتقرير ب: "نبت الزرع"
فاكتب التقارير التي تدل عليها الرموز التالية:

(1) أ ∨ ب
(2) أ ∧ ب
(3) أ → ب
(4) أ ⊻ ب
(5) أ ↔ ب
(6) ~ أ ∧ ب
(7) ~ أ ↔ ~ ب
(8) ~ (ب ∧ ~ أ)

الحل:
(1) أمطرت السماء أو نبت الزرع.
(2) أمطرت السماء و نبت الزرع.
(3) إذا أمطرت السماء فإن الزرع ينبت.
(4) إما أن السماء تمطر أو الزرع ينبت وليس كليهما.

(5) ينبت الزرع إذا وفقط إذا أمطرت السماء

(6) السماء لا تمطر والزرع ينبت.

(7) لا تمطر السماء إذا وفقط إذا كان الزرع ينبت.

(8) ليس صحيحا أن: الزرع ينبت والسماء لا تمطر.

● ملاحظات:

- بالرغم من أن أدوات الربط المنطقية مستمدة من أدوات الربط في اللغة، إلا أن استخدامها يشبه إلى حد بعيد استخدام العمليات في الحساب وجبر الأعداد وجبر الفئات. لذا فإن هذه الروابط المنطقية تسمى أحيانا "بالعمليات المنطقية".

- في المنطق الرياضي تستخدم أدوات الربط للربط بين أي تقريرين أو أكثر بغض النظر عن وجود صلة حقيقية بين هذه التقارير أم لا:

فمثلا نقول: "إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإن السماء تمطر ذهبًا".

أو نقول: "لندن عاصمة فرنسا أو $3 \times 4 = 12$".

- قيمة الصدق لأي تقرير مركب لا تتوقف على المعاني التي تحملها التقارير البسيطة المكونة له (وتسمى مركباته)، بل تتوقف على صواب أو خطأ كل من هذه التقارير البسيطة وعلى أدوات الربط المستخدمة.

- ومن أجل معرفة قيمة الصدق للتقارير المركبة وسهولة دراستها نستخدم جداول تسمى "جداول الصواب" أو "جداول الصدق".

2:2 جداول الصدق

يسمى الجدول الذي يتضمن كل إمكانيات قيم الصدق لتقرير ما "بجدول الصواب" أو "جدول الصدق" أو "جدول الحقيقة" Truth table

وهذه الجداول تشبه إلى حد كبير جداول إنتماء العنصر إلى المجموعة

- إذا كان لدينا التقرير "م" فإن هذا التقرير :

إما أن يكون صائبًا ويرمز لذلك بالرمز ص أ، 1

وإما أن يكون خاطئًا ويرمز لذلك بالرمز خ أ، 0

ويكون جدول الصدق للتقرير م هو :

م
ص
خ

م
1
0

- إذا كان لدينا التقريرين م، ب وكانت قيمة الصدق لكل منهما إما صواب (ص) أو خطأ (خ) فإن جدول الصدق لأي تقرير جديد من م، ب لابد أن يتضمن الإمكانيات المختلفة لقيم صدق المركبة م وقيم صدق المركبة ب.

وفي هذه الحالة نجد أن جدول الصدق للتقرير الجديد يتضمن أربع إمكانيات لمركبتيه م، ب معا على النحو التالي :

م	ب	التقرير المركب من م، ب معًا		
ص	ص	..	..	..
ص	خ	..	..	..
خ	ص	..	..	..
خ	خ	..	..	..

- إذا كان لدينا التقارير م، ب، حـ . وكانت قيمة الصدق لكل منها إما صواب (ص) أو خطأ (خ) فإن جدول الصدق لأي تقرير مركب من م، ب، حـ معًا يكون على الصورة التالية :

أ	ب	جـ	التقرير المركب س (أ، ب، جـ) معًا
ص	ص	ص	....
ص	ص	خ	....
ص	خ	ص	....
ص	خ	خ	....
خ	ص	ص	....
خ	ص	خ	....
خ	خ	ص	....
خ	خ	خ	....

ملاحظات :

إذا كانت قيمة الصدق للتقارير التي نتناولها إما ص أو خ فإن:

1. - جدول الصدق لتقريرين مختلفين معًا يتضمن 2^2 امكانية.
 - جدول الصدق لثلاثة تقارير مختلفة معًا يتضمن 2^3 إمكانية.
 - وبصورة عامة:

 جدول الصدق المركب من ن من التقارير المختلفة
 يتضمن 2^n إمكانية.

2. إذا كانت هناك تقارير نعرف صوابها فقط أو خطأها فقط
 - وهي ما أسميناها سابقًا "بالتقارير المعينة" فإن الاستنتاج
 السابق عندئذ لا يكون صحيحًا.

مثلا: إذا كانت قيمة الصدق للتقرير أ هي ص
، قيمة الصدق للتقرير ب هي خ
، قيمة الصدق للتقرير جـ غير معينة {إما ص أو خ}
فإن عدد امكانيات ظهور التقارير أ، ب، جـ معًا

$$= 1 \times 1 \times 2 = 2$$

ويكون جدول الصدق في هذه الحالة على الصورة:

أ	ب	جـ	التقرير المركب س (أ، ب، جـ) معًا
ص	خ	ص	....
ص	خ	خ	....

- مما سبق أن ذكرنا أن قيمة الصواب لأى تقرير مركب تتوقف على قيم الصدق للتقارير البسيطة المكونة له، وعلى أدوات الربط المستخدمة.
- وفيما يلى نتعرف على القواعد الخاصة بأدوات الربط والتى تعطينا بواسطتها - بصفة نهائية - قيمة الصواب لأى تقرير مركب.

1:2:2 أداة النفى (~) Negation

نفى التقرير م - ويرمز له بالرمز ~ م، وتتحدد قيمة صدقه طبقاً للقاعدة التالية:

إذا كان م صوابا فإن ~ م يكون خطأ
وإذا كان م خطأ فإن ~ م يكون صواباً.

ويكون جدول الصدق للتقرير م ونفيه ~ م كالتالى:

~ م	م
خ	ص
ص	خ

ملاحظات:
1. النفى عموما يعنى "اللاوجود للموجود"
2. الحكم على صواب تقرير ما أو خطئه يعود بالدرجة الأولى إلى فرع العلم الذى ينتمى إليه هذا التقرير، أما نفى التقرير فيخضع لحكم قاعدة النفى المنطقية.
3. يستخدم عند نفى التقارير أساليب لغوية متعددة، أو رموز رياضية متعددة - وبلغة الرياضيات يكون نفى التقرير هو الحالة أو الحالات المكملة لحالة هذا التقرير

مثال: (1) إذا كان لدينا التقرير م: "الشمس مشرقة"
فإن نفيه ~ م: ليس صحيحاً أن الشمس مشرقة
: ليست الشمس مشرقة
: الشمس غير مشرقة

(2) إذا كان التقرير ب: ٣ > ٧

فإن ~ب: ٣ < ٧ أو ٣ = ٧

: ٣ ≤ ٧

ومن الحساب نعلم أن ب صواب ∴ ~ب خطأ.

(3) إذا كان التقرير هـ: $\sqrt{-1} \times \sqrt{-4} = 2$

فإن ~هـ: $\sqrt{-1} \times \sqrt{-4} \neq 2$

ونعلم من جبر الأعداد المركبة أن هـ خطأ ∴ ~هـ صواب.

[2:2:2] أداة الربط "و" (٨) Conjunection

تتعين قيمة الصدق للتقرير أ٨ب وفق القاعدة التالية:

"التقرير المركب أ٨ب يكون صوابا في حالة واحدة فقط وهي أن يكون أ، ب صوابين معا. وفيما عدا ذلك يكون أ٨ب خطأ"

ويكون جدول الصدق للتقرير أ٨ب كالتالي:

أ	ب	أ٨ب
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	خ

مثال: أكتب جدول الصدق لكل من التقريرين المركبين التاليين:

(1) ~أ٨(أ٨ب) (2) (أ٨ب)٨هـ

الحل: (1): نظرا لأن التقرير المركب ~أ٨(أ٨ب) يحوي التقريرين أ، ب فإن جدول الصدق تتضمن 4 إمكانيات

أ	ب	~أ	أ٨ب	~أ٨(أ٨ب)
ص	ص	خ	ص	خ
ص	خ	خ	خ	خ
خ	ص	ص	خ	خ
خ	خ	ص	خ	خ

(2) ∵ التقرير المركب (أ ∧ ب) ∧ ج يحوي ثلاثة متغيرات أ، ب، ج

∴ جدول الصدق لهذا التقرير تتضمن 8 إمكانيات

أ	ب	ج	أ ∧ ب	(أ ∧ ب) ∧ ج
ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	خ	ص	خ
ص	خ	ص	خ	خ
ص	خ	خ	خ	خ
خ	ص	ص	خ	خ
خ	ص	خ	خ	خ
خ	خ	ص	خ	خ
خ	خ	خ	خ	خ

• لاحظ أن التقرير (أ ∧ ب) ∧ ج يكون صوابا في حالة واحدة فقط وهي كون أ، ب، ج صوابًا معا.

• يسمى الرابط "∧" أحيانا "بعملية الضرب المنطقي"

كما ترمز للتقرير أ ∧ ب أحيانا بالرمز أ × ب أو أ ب

[3:2:2] أداة الربط "أو" (∨) Inclusion

"التقرير المركب أ ∨ ب يكون صوابا في جميع الحالات عدا كون أ، ب خاطئين معًا"

وطبقا لهذه القاعدة يكون جدول الصدق للتقرير أ ∨ ب كالتالي:

أ	ب	أ ∨ ب
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	خ

• مثال: إذا كان: التقرير أ هو "قطرا المعين متعامدان"
و التقرير ب هو "قطرا المعين متساويان في الطول"
و التقرير جـ هو "السماء تمطر".
فبين باستخدام جداول الصدق أن:
(i) التقرير (أ ∨ ب) ∧ (أ ∧ جـ) غير معين
(ii) التقرير (أ ∨ ب) ∨ [~(أ ∧ جـ)] معين وصدقيته صوابه

الحل: من الواضح أن: التقرير أ صواب ، التقرير ب خطأ
أما التقرير جـ فتتحدد صدقيته صوابه على حالة الطقس لحظة ذكر هذا التقرير ، وبالتالي قد يكون صائبًا و قد يكون خاطئًا.
∴ عدد الإمكانيات المختلفة لجدول الصدق =
= عدد إمكانيات أ × عدد إمكانيات ب × عدد إمكانيات جـ
= 1 × 1 × 2 = 2

أ	ب	جـ	أ ∨ ب	أ ∧ جـ	~(أ ∧ جـ)	(أ ∨ ب) ∧ (أ ∧ جـ)	(أ ∨ ب) ∨ [~(أ ∧ جـ)]
ص	خ	ص	ص	ص	خ	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ	ص	خ	ص

(i) ∧ ، (ii) ∨

من هذا الجدول نلاحظ أن:
(i) في العمود السابع ظهرت قيمتي الصدق ص ، خ
يعني ذلك أن التقرير (أ ∨ ب) ∧ (أ ∧ جـ) ليس له قيمة صدق ثابتة - و بالتالي فهو تقرير غير معين منطقيا.
(ii) في العمود الثامن ظهرت قيمة صدق واحدة - يعني ذلك أن التقرير (أ ∨ ب) ∨ [~(أ ∧ جـ)] له قيمة صدق ثابتة - أي أنه صواب (ولا يكون خطأ في شكل آخر) دائما - و بالتالي فهو تقرير معين منطقيا.

[4:2:2] أداة الربط "إما... أو... وليس كليهما" ($\veebar$) Exclusion

"التقرير المركب أ $\veebar$ ب يكون صوابًا فقط إذا كان أحد التقريرين أ، ب صوابًا والآخر خطأ"

وطبقًا لهذه القاعدة يكون جدول الصدق للتقرير أ $\veebar$ ب كالتالي:

أ	ب	أ $\veebar$ ب
ص	ص	خ
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	خ

- معنى ذلك أن أ $\veebar$ ب يكون صوابًا إذا اختلفت قيمتي صواب أ، ب ويكون خاطئًا إذا اتفقت قيمتي صواب أ، ب.

• مثال: لتكن أ : "الأرض كروية"

، ب : "الأرض تدور حول الشمس"

، جـ : "$2 + 3 = 4$"

، د : "النجوم ساطعة".

عين قيمة الصدق (إن أمكن) لكل من التقارير التالية:

(1) أ $\wedge$ ب　　(2) أ $\wedge$ جـ

(3) أ $\wedge$ د　　(4) أ $\vee$ ب

(5) أ $\vee$ جـ　　(6) أ $\vee$ د

(7) أ $\veebar$ ب　　(8) أ $\veebar$ د

(9) (أ $\vee$ ب) $\wedge$ جـ

الحل: التقرير أ صواب، ب صواب، جـ خطأ

أما التقرير د فمداه {ص، خ} - أي غير معين.

(1) أداة الربط $\wedge$ - أ صواب، ب صواب ⟸ أ $\wedge$ ب صواب

(2) أداة الربط $\wedge$ - أ صواب، جـ خطأ ⟸ أ $\wedge$ جـ خطأ

(3) أداة الربط $\wedge$ - أ صواب، د غير معين ⟸ أ $\wedge$ د غير معين

(4) أداة الربط ∨ - أ صواب ، ب صواب ⇐ أ ∨ ب صواب

(5) أداة الربط ∨ - أ صواب ، حـ خطأ ⇐ أ ∨ حـ صواب

(6) أداة الربط ∨ - أ صواب ، د غير معينة ⇐ أ ∨ د صواب
(بغض النظر عن قيمة صدق د)

(7) أداة الربط $\underline{\vee}$ - أ صواب ، ب صواب ⇐ أ $\underline{\vee}$ ب خطأ

(8) أداة الربط $\underline{\vee}$ - أ صواب ، د غير معينة ⇐ أ $\underline{\vee}$ د غير معينة.

(9) أداة الربط ∧ - المركبة أ ∨ ب صواب ، المركبة حـ خطأ
⇐ (أ ∨ ب) ∧ حـ خطأ.

• ملاحظات

① تعرضنا في البديهيات السابقة إلى حرف الفصل "أو" ولاحظنا اختلاف الأحكام في التقارير المركبة الناتجة من استخدام هذا الحرف كأداة الربط (∨) أو كأداة الربط ($\underline{\vee}$). وهذا الاختلاف راجع إلى اختلاف المناطقة في بيان معنى "أو"، فقد قسم المناطقة العرب هذا المعنى تقسيما ثلاثيا

الأول : "أو" مانعة الجمع

وهي التي تمنع فقط أن يكون طرفيها معا صوابا
مثل قولنا "هذا الشيء جماد أو نبات"
فهذا القول صواب في جميع الحالات عدا كون الطرفين صوابا

الثاني : "أو" مانعة الخلو :

وهي التي تمنع فقط أن يكون طرفيها معًا خطأ.
وهذا المعنى هو الذي استخدمناه سابقا على أنه بمعنى (∨)
وتسمى "أو" في هذه الحالة "أو - الشاملة" أو
"أو - الاختيارية" أو "أو - الاحتوائية"
كما يسمى الفصل في هذه الحالة "الفصل الضعيف".

الثالث : "أو" مانعة الجمع والخلو :

وهي التي تمنع توافق طرفيها في قيمة الصدق.

مثل قولنا : " هذا العدد إما زوجيًا أو فرديًا "
ففي هذا القول نجد أنه لا يمكن أن يكون الاثنين معًا
- أي لا يمكن أن يكون العدد زوجيا وفرديا في آن واحد.
وهذا المعنى هو الذي استخدمناه سابقا على أنه أداة لربط (⊻)
وتسمى "أو" في هذه الحالة "أو - الاستبعادية" أو
"أو - الاختيارية" أو "أو - المنفردة"
ويسمى الفصل في هذه الحالة "الفصل الحقيقي" أو "الفصل القوي".

• جداول الصدق التالية توضح الفرق بين هذه التقسيمات الثلاث :

أو - مانعة الجمع

م	ب	م ∨̶ ب
ص	ص	خ
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	ص

أو - مانعة الخلو

م	ب	م ∨ ب
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	خ

أو - مانعة الجمع والخلو

م	ب	م ⊻ ب
ص	ص	خ
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	خ

وعلى الرغم من هذا التصنيف المنطقي لحرف "أو" إلا أن اللغة العادية لا تفتقر إلى هذا التصنيف، بل تستخدم الانفصال بمعناه الحقيقي غالبا (⊻)

② الرابط المنطقي (∨) يسمى أحيانا "عملية الجمع المنطقي" كما يرمز للتقرير م ∨ ب أحيانا بالرمز م + ب

③ لكي نميز بين "أو" بمعنى ∨ وبين أو بمعنى ⊻ عند التعبير اللفظي للتقريرين م ∨ ب ، م ⊻ ب أو قراءتهما نتفق على التالي : مثلا

إذا كان م : محمد ذكي ، ب : محمد مجتهد فإن :

م ∨ ب تكتب لفظيا " محمد ذكي أو مجتهد "

م ⊻ ب تكتب لفظيا " إما أن محمد ذكي أو مجتهد وليس كليهما "

أو تكتب " فقط إما محمد ذكي أو مجتهد ".

Conditional (←) أداة الشرط "إذا... فإن..." [5.2.2]

سبق أن عبرنا عن التقرير الشرطي "إذا كان أ فإن ب"

بالصورة الرمزية أ ← ب

وقد اصطلح على تسمية أ "المقدمة" وأحيانا "المعطى"

وتسمية ب "النتيجة" أو "الاستنتاج".

- وتتعين قيمة الصدق للتقرير أ ← ب طبقا للقاعدة المنطقية التالية:

"التقرير أ ← ب يكون صوابا في جميع الحالات عدا الحالة التي يكون فيها المقدمة أ صواب والنتيجة (ب) خطأ".

وطبقا لهذه القاعدة يكون جدول الصدق كالتالي:

أ	ب	أ ← ب
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	خ	ص

ويرى البعض أن هذا الجدول ليس بتلك البداهة مثل جداول الصدق لـ ~ ، ∧ ، ∨ - ومن هنا فإن ما يتم صرفه في هذا الجدول قد لا نسلم بصحته بيسر وسهولة - ولنأخذ مثالا قد يساعد على قبول هذا الجدول:

- لنفترض أن أبا قال لابنه التقرير التالي:

"إذا نجحت هذا العام فسأشتري لك جهاز كمبيوتر"

فمتى يكون الأب صادقا في كلامه؟ ومتى يكون كاذبا؟

لندرس الحالات المختلفة لهذه المقولة:

(1) الابن نجح والأب اشترى له الكمبيوتر

∴ الأب صادق في قوله - ويكون التقرير صائبا.

(2) الابن نجح والأب لم يشتر للابن جهاز الكمبيوتر

∴ الأب كاذب في قوله - ويكون التقرير خطأ.

(3) الابن لم ينجح والأب اشترى له الكمبيوتر

(4) الإبن لم ينجح   والأب لم يشترى له الكمبيوتر.

• في الحالتين (3) ، (4)

حيث أن الأب لم يتركز قوله لابنه " إذا لم تنجح فلن أشترى لك جهاز الكمبيوتر "

لذا فإن الأب يعتبر صادقاً في هاتين الحالتين ، وبالتالي فإن هذين التقريرين صائبان.

ومن هذا المثال نجد أن التقرير $م \to ب$ صائباً في جميع الحالات ما عدا الحالة التي فيها المقدمة صواب والنتيجة خطأ

مثال : حدد قيمة الصدق لكل مما يأتي :

(1) $(5 > 3) \longrightarrow (8 > 5)$

(2) $(3 > 5) \longrightarrow (2 > 5)$

(3) $3^2 = 9 \longrightarrow 2^3 = 9$

(4) إذا لم تستح فاصنع ما شئت .

الحل :

(1) لتكن م : $(5 > 3)$ ، ب : $(8 > 5)$

∵ م صواب   ، ب صواب   ∴ $م \to ب$ صواب

(2) لتكن ه : $(3 > 5)$ ، ء : $(2 > 5)$

∵ ج خطأ   ∴ $ه \to ء$ صواب

(3) لتكن ه : $3^2 = 9$ ، و : $2^3 = 9$

∵ ه صواب ، و خطأ   ∴ $ه \to و$ خطأ

(4) لتكن ف : " الشخص لم يستح " ، ك : " الشخص يصنع ما يشاء "

∵ ف خطأ   ∴ $ف \to ك$ صواب

• نلاحظ أنه في الفقرتين (2) ، (4) لم نتعرض لقيمة الصدق لنتيجة التقرير نظراً لكون المقدمة في كل منهما خطأ .

• ملاحظات

(1) في التقرير الشرطي لا تظهر أحياناً أداة الربط " إذا .. فإن " وذلك من أجل الاستعمال اللغوي السليم ، وإنما تفهم من سياق الكلام

فمثلاً إذا أخذنا التقرير الشرطي :

" إذا كانت قياسات زوايا المثلث متساوية فإن أطوال أضلاعه متساوية " - هذا التقرير علينا كتابته بصورة لغوية أخرى كالتالي : " إذا تساوت قياسات زوايا المثلث ، تساوت أطوال أضلاعه " أو : " تتساوى أطوال أضلاع المثلث إذا تساوت قياسات زواياه ".

(2) في التقرير الشرطي : ليس بالضرورة أن يكون المقدم (م) أو التالي (ب) تقريراً بالمعنى المفهوم . فمثلاً

• في التقرير الشرطي " إذا تساوت قياسات زوايا المثلث تساوت أطوال أضلاعه " نلاحظ أن كلاً من :

المقدمة : " تساوت قياسات زوايا المثلث "

والتالي : " تساوت أطوال أضلاعه " لا تمثل قولاً كاملاً - أي لا تمثل تقريراً - وإنما كل منهما مرتبط بالآخر ولا يقوم إلا بقيام الآخر ، ومع ذلك إذا أخرجنا كلاً منهما من حالة الشرط لا تتحول إلى تقرير.

• وفي التقرير الشرطي : " إذا أسرعت قليلاً لحقت القطار " نلاحظ أن المقدمة " أسرعت قليلاً " لا تمثل تقريراً حتى بعد خروجها من حالة الشرط .

(3) هناك تعبيرات كثيرة تحمل نفس المعنى للتقرير الشرطي م ← ب مثل :

• إذا كان م فإن ب ▲ ب إذا م

• م تنتج ب ▲ ب نتيجة لـ م

▲ ب عندما م

▲ ب متى كان م

• م شرط كافٍ لكي يكون ب ▲ ب شرط ضروري لكون م

• م تستلزم ب ▲ ب شرط لازم لكون م

• م فقط إذا كان ب. وتعني : "إذا كان م فإن ب". ▲ ب إذا كان م

• مثال: صغ التقارير التالية بالصيغة $أ \leftarrow ب$:

(1) المضلع لا يحتوى على أقطار فقط إذا كان مثلث.

(2) الشرط الضرورى لكون المستقيمين $ل_1$، $ل_2$ متوازيين هو $ل_1 \cap ل_2 = \phi$

(3) $س \in ص$ إذا كانت $س \in ط$

(4) الأعداد النسبية حقيقية.

(5) تساوى أطوال أضلاع شكل رباعى شرط كافى لكى يكون معينًا.

(6) $س^2 = 4$ عندما $س = 2$.

(7) المستطيل ليس مضلع منتظم

(8) الدالة متصلة عند نقطة ما شرط لازم لكى تكون قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة.

الحل:

(1) لتكن $أ$: المضلع لا يحتوى على أقطار ، $ب$: المضلع مثلثًا
وبتحويل التقرير إلى الصيغة $أ \leftarrow ب$ يصبح:
"إذا كان المضلع ليس له أقطار فإنه مثلث"

(2) $أ$: $ل_1 // ل_2$ ، $ب$: $ل_1 \cap ل_2 = \phi$
∴ التقرير بالصيغة $أ \leftarrow ب$ يصبح: $(ل_1 // ل_2) \leftarrow ل_1 \cap ل_2 = \phi$
"إذا كان المستقيمان $ل_1$، $ل_2$ متوازيين فإن $ل_1 \cap ل_2 = \phi$".

(3) $أ$: $س \in ط$ ، $ب$: $س \in ص$
وبتحويل التقرير إلى الصيغة $أ \leftarrow ب$ يصبح:
$(س \in ط) \leftarrow (س \in ص)$

(4) $أ$: $س \in ن$ (مجموعة الأعداد النسبية)
$ب$: $س \in ح$ (مجموعة الأعداد الحقيقية)
∴ $(س \in ن) \leftarrow (س \in ح)$

(5) $أ$: أطوال أضلاع الشكل الرباعى متساوية
$ب$: الشكل الرباعى معين.
وبتحويل التقرير إلى الصيغة $أ \leftarrow ب$ يصبح:
"إذا كانت أطوال أضلاع الشكل الرباعى متساوية فإنه معين"

(6) أ : (س = -2) ، ب : (س² = 4)

وبصياغتها على الصورة أ ← ب تصبح :

" إذا كانت س = -2 فإنه $س^2 = 4$ "

(7) أ : الشكل مستطيل ، ب : الشكل ليس مضلع منتظم .

وبتحويل التقرير إلى الصيغة أ ← ب يصبح ،

" إذا كان الشكل مستطيل فإنه ليس مضلعاً منتظماً ".

(8) أ : الدالة د قابلة للاشتقاق عند نقطة ما

، ب : الدالة د متصلة عند نفس النقطة

وبتحويل التقرير إلى الصيغة أ ← ب يصبح :

" إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند نقطة ما فإنها تكون متصلة عند نفس النقطة ".

مثال : أنشئ جدول الصدق للتقريرين :

(i) (أ ← ب) ٧ (ب ← أ)

(ii) (أ ← ب) ٨ (ب ← أ) ماذا تلاحظ ؟

الحل

أ	ب	أ ← ب	ب ← أ	(أ ← ب) ٧ (ب ← أ)	(أ ← ب) ٨ (ب ← أ)
ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	ص	خ
خ	ص	ص	خ	ص	خ
خ	خ	ص	ص	ص	ص

من الجدول نلاحظ أنه :

(i) التقرير (أ ← ب) ٧ (ب ← أ) له قيمة صدق ثابتة وهي (ص)

∴ هذا التقرير صحيح منطقياً .

(ii) التقرير (أ ← ب) ٨ (ب ← أ) ليس له قيمة صدق ثابتة

فهي إما ص أو خ

∴ هذا التقرير غير صحيح منطقياً .

[6:2:2] الشرط الثنائي "... إذا وفقط إذا..." (↔) Biconditional

يسمى التقرير أ ↔ ب "التقرير الشرطي الثنائي" أو "التقرير الثنائي" أو "التقرير الشرطي المزدوج"

ونعني بذلك التقرير أ ← ب وعكسه أي ب ← أ وعكسه.

- ويعتبر التقرير " أ إذا وفقط إذا ب" مكون من التقريرين:

"أ إذا ب" و " أ فقط إذا ب" أي:

"إذا كان ب فإن أ" و " إذا كان أ فإن ب" أي:

(ب ← أ) ∧ (أ ← ب) أي أن:

أ ↔ ب تكافئ (ب ← أ) ∧ (أ ← ب)

فمثلاً: التقرير "المثلث يكون متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا تساوت قياسات زواياه" مكون من التقريرين:

"إذا كانت قياسات زوايا المثلث متساوية فإنه يكون متساوي الأضلاع"

و "إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإن قياسات زواياه تكون متساوية"

- واستناداً للمثال السابق يكون جدول الصدق للتقرير أ ↔ ب كالتالي:

أ	ب	أ ↔ ب
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	ص

يعني ذلك أن: التقرير الشرطي الثنائي أ ↔ ب يكون صواباً إذا توافقت قيمتي الصدق لـ أ، ب - أي إذا كان أ، ب صوابين معاً أو خاطئين معاً.

مثال: حدد قيمة الصدق لكل من:

(1) (1 > 2) ↔ (3 > 2)

(2) $(3<5) \longleftrightarrow 2\times3 < 2\times5$

(3) 3^2 عدد زوجي إذا وفقط إذا كان 3 عدد فردي .

(4) سأذهب إلى المصيف إذا وفقط إذا اشتد الحر .

الحل :

(1) التقرير صواب لأن كل من مركبتيه خطأ

(2) التقرير صواب لأن كل من مركبتيه صواب

(3) التقرير خطأ لاختلاف مركبتيه في قيمة الصدق .

(4) التقرير غير معين حيث :

- يكون صوابا في الحالتين :
  - اشتد الحر وذهبت إلى المصيف
  - لم يشتد الحر ولم أذهب إلى المصيف .
- ويكون خطأ في الحالتين :
  - اشتد الحر ولم أذهب إلى المصيف
  - لم يشتد الحر وذهبت إلى المصيف .

ملاحظات

- الشرط الثنائي " .. إذا وفقط إذا .. "
" .. if and only if .. " واختصارا " .. iff .. " يستخدم بكثرة في المنطق عندما تكون العبارة - أي عبارة - صحيحة وعكسها صحيح أيضا .
- الشرط الثنائي أ ⟷ ب يعبر عنه في الرياضيات بإحدى الصيغ التالية والتي لها نفس المعنى .
  - ب شرط ضروري وكافي لكي تكون أ .
  - أ شرط كافي وضروري لكي تكون ب .
  - أ شرط ضروري وكافي لكي تكون ب .
  - أ يكافئ ب .
  - إذا كان أ فإن ب والعكس .
  - إذا كان ب فإن أ والعكس .

مثال: حول التقارير التالية إلى الصيغة الرمزية لها:

(1) س = 4 إذا وفقط إذا كان س + 2 = 6

(2) س ∈ قابلة أ شرط لازم وكافي لـ س ∌ أ.

(3) إذا تساوى طولا ضلعين في مثلث يكون متساوي الساقين، والعكس.

الحل:

(1) (س = 4) ⟷ (س + 2 = 6)

(2) (س ∌ أ) ⟷ (س ∈ قابلة أ)

(3) المثلث متساوي الساقين ⟷ تساوى طولا ضلعين فيه.

مثال: إذا كان أ: "مضلع أطوال أضلاعه متساوية"

، ب: "مضلع قياسات زواياه متساوية"

، ح: "مضلع منتظم".

أولاً: عبر عن التقرير (أ ∧ ب) ⟵ ح لفظياً.

ثانياً: كون جدول الصدق للتقرير (أ ∧ ب) ⟵ ح

الحل:

(1) التعبير اللفظي هو:

"يكون المضلع منتظماً إذا وفقط إذا تساوت أطوال أضلاعه وتساوت قياسات زواياه".

(2)

	أ	ب	ح	أ ∧ ب	(أ ∧ ب) ⟵ ح
1	ص	ص	ص	ص	ص
2	ص	ص	خ	ص	خ
3	ص	خ	ص	خ	خ
4	ص	خ	خ	خ	ص
5	خ	ص	ص	خ	خ
6	خ	ص	خ	خ	ص
7	خ	خ	ص	خ	خ
8	خ	خ	خ	خ	ص

وبتأمل جدول الصدق لهذا التقرير نجد أنه:

- التقرير صوابا في أربع حالات، وهذه الحالات تمثل بالصفوف 1، 4، 6، 8 في الجدول - وبالنظر إلى الحالات الثلاث الأخيرة منها والممثلة بالصفوف 4، 6، 8 نجد أنها لا تتفق مع التعريف الرياضي لمضلع المنتظم - وهذا التعارض بين المنطق والرياضيات راجع إلى عدم التحديد المسبق لقيمة الصدق لكل من أ، ب. ومع ذلك فإن هذه الحالات تعتبر صحيحة من وجهة نظر المنطق.

- ويمكن صياغة المثال السابق في صورة تتفق مع المفاهيم الرياضية

إذا كان: أ: "مضلع أطوال أضلاعه متساوية" صوابا

، ب: "مضلع قياسات زواياه متساوية" صوابا

، حـ: "مضلع منتظم".

فإن عدد إمكانيات (صفوف) جدول الصدق للتقرير

(أ ∧ ب) ← حـ $= 1 \times 1 \times 2 = 2$

ويكون جدول الصدق لهذا التقرير كالتالي:

أ	ب	حـ	أ ∧ ب	(أ ∧ ب) ← حـ
ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	خ	ص	خ

من الجدول نلاحظ أن قيمة الصدق للتقرير (أ ∧ ب) ← حـ تتفق فقط مع التعريف الرياضي لمضلع المنتظم.

[3:2] أنواع التقارير المركبة

- التقرير المركب الذي يكون مداه صوابا دائما مهما كانت قيم صدق مركباته يسمى " صائب منطقيا Logically True " ويسمى مثل هذه الحالة " تحصيل حاصل - أو توتولوجي Tautology "
- التقرير المركب الذي يكون مداه خطأ دائما مهما كانت قيم صدق مركباته يسمى " خاطئ منطقيا Logically False " ويسمى مثل هذه الحالة " تناقض - أو تعارض Contradiction "
- أما إذا كان مدى التقرير المركب بعضه صواب والبعض الآخر خطأ فيسمى " غير معين منطقيا Logically Indeterminate "

مثال: بين نوع كل من التقارير التالية من حيث كونه صائب منطقيا أم خاطئ منطقيا أم غير معين منطقيا.

[أ] $م \wedge \sim م$ [ب] $(م \wedge ب) \leftarrow ب$

[ج] $م \vee (م \wedge ب)$ [د] $[(م \leftarrow ب) \wedge م] \leftarrow ب$

الحل: [أ] من الجدول المقابل

∵ مدى التقرير $م \wedge \sim م$ خطأ دائما

∴ التقرير خاطئ منطقيا (تعارض)

م	~م	م∧~م
ص	خ	خ
خ	ص	خ

[ب]

م	ب	م∧ب	(م∧ب)←ب
ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص
خ	ص	خ	ص
خ	خ	خ	ص

∵ مدى التقرير $(م \wedge ب) \leftarrow ب$ صواب دائما

∴ التقرير صائب منطقيا

[ج]

م	ب	م∧ب	م∨(م∧ب)
ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص
خ	ص	خ	خ
خ	خ	خ	خ

∵ مدى التقرير $م \vee (م \wedge ب)$ هو {ص، خ}

∴ التقرير غير معين منطقيا.

[د] من الجدول

- مدى التقرير صواب دائماً

∴ التقرير [(م ← ب) ∧ م] ← ب

صائب منطقياً (توتولوجي).

م	ب	م ← ب	(م ← ب) ∧ م	التقرير
ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	خ	ص
خ	ص	ص	خ	ص
خ	خ	ص	خ	ص

- مثال: إذا كانت قيم الصدق للتقارير ن، ل، م هي: صواب، خطأ، خطأ على الترتيب.

فاثبت أن التقرير ن ∧ (ل ← م) صائب منطقياً.

الحل: ∵ ل خطأ ، م خطأ (المعطى)

∴ (ل ← م) صواب (قاعدة ←)

، ∵ ن صواب ، ل ← م صواب

∴ ن ∧ (ل ← م) صواب (قاعدة ∧)

∴ ن ∧ (ل ← م) صائب منطقياً (تحصيل حاصل).

- يمكن الإثبات عن طريق جدول الصدق كالتالي:

ن	ل	م	ل ← م	التقرير
ص	خ	خ	ص	ص

∵ مدى التقرير ن ∧ (ل ← م) = {ص}

∴ التقرير صائب منطقياً (تحصيل حاصل).

تمارين [1:2]

1. حدد مركبتي كل من التقارير التالية وأداة الربط المستخدمة :

(i) الجو بارد والسماء تمطر.

(ii) الجو بارد أو السماء تمطر.

(iii) إما أن الجو بارد أو السماء تمطر

(iv) إما أن الجو بارد أو السماء تمطر وليس كليهما .

(v) إذا كانت القاهرة عاصمة ج.م.ع ، فإن الصفر عدد صحيح

(vi) ليس صحيحا أنه إذا فاز الزمالك سيحصل على الدوري

(vii) تسطع الشمس إذا انتصف النهار

(viii) المضلع الرباعي يكون مربعا إذا وفقط إذا كان $5 \times 2 = 8$

2. في التمرين السابق إذا كان "ه" رمز لمركبة الأولى في كل تقرير ، "ك" رمز لمركبة الثانية ،فعبر عن كل منها بصيغة رمزية .

3. إذا كان التقرير د : "لون اللبن أبيض"
والتقرير ه : "لون العسل أسمر"
فعبر لفظيا عن التقارير التي دلالاتها الصور الرمزية التالية :

(i) $د \wedge ه$	(ii) $د \wedge \sim ه$
(iii) $د \vee ه$	(iv) $\sim (د \vee ه)$
(v) $د \underline{\vee} ه$	(vi) $\sim د \underline{\vee} ه$
(vii) $د \leftarrow ه$	(viii) $د \longleftrightarrow ه$
(ix) $\sim (د \leftarrow ه)$	(x) $\sim (د \longleftrightarrow ه)$

4. حدد قيمة الصدق لكل من التقارير التالية :

(i) $(2 > 3)$ و $(2 + 3 = 5)$

(ii) $(2 < 3)$ و $(2 \times 3 = 5)$

(iii) لكل عدد حقيقي س ، $\sqrt{س^2} = |س|$ و $|س| < 0$

(iv) 2 عدد زوجي أو أولي

(v) ط عدد صحيح أو نسبي

(vi) ليس صحيحا أن الصفر عدد زوجي

(vii) الصفر غير سالب وغير موجب.

(viii) الصفر غير سالب أو غير موجب

(ix) $(4 > 3) \longrightarrow 4 \geq 3$

(x) $(4 \geq 3) \longrightarrow 4 > 3$

(xi) $2س - 4 = ٥ \longrightarrow س = 4$

(xii) $2 > ٥ \longleftrightarrow -2 < ٥$

(xiii) $(7 = 1 + 5) \longleftrightarrow (7 - 1 = 5)$

(xiv) الدالة د متصلة ⟵ الدالة د قابلة للاشتقاق.

5 . عبر عن التقارير التالية باستخدام أداة الشرط ⟵ :

(i) $1 + 3 = 4$ شرط لازم لكي يكون $1 + 4 = 5$

(ii) ليس للعدد الطبيعي ن عوامل أولية فعلية عندما تكون أوليا

(iii) المكعب متوازي مستطيلات

(iv) س عدد نسبي تستلزم أن يكون س على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ، ب عددان صحيحان ، $ب \neq ٥$

(v) $ب^2 - 4أ حـ \geq ٥$ شرط كافي لكي يكون للمعادلة $أس^2 + ب س + حـ = ٥$ جذران حقيقيان.

(vi) د دالة متصلة عند $س = 2$ عندما تكون قابلة للاشتقاق عند $س = 2$.

(vii) ينتصر العرب إذا توحدوا.

(viii) الشرط الضروري لكي يكون $|س| = ٥$ هو $س = ٥$

(ix) $س \in أ \cap ب$ إذا كان $(س \in أ ، س \in ب)$

(x) يتطابق المثلثان عندما تتساوى أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما.

6 . عبر عن التقارير التالية بالصيغة أ ⟷ ب :

(i) ن عدد زوجي شرط ضروري وكافي لكي يكون ن+1 فردي

(ii) إذا كان المستقيمان $ل_1$، $ل_2$ غير متوازيين فإن : $ل_1 \cap ل_2 \neq \phi$ وبالعكس.

(iii) $أ \cdot ب = ٥$ إذا وفقط إذا كان ($أ = ٥$ أو $ب = ٥$)

(iv) $س^2 - ص^2 = ٥$ تكافئ ($س = ص$ أ، $س = -ص$)

(٧) الشرط الكافي والضروري لكي تكون:

$$\lim_{ن \to \infty} (أ + أس + أس^2 + \dots + أس^ن) = \frac{أ}{1-س} \quad \text{هو } |س| < 1$$

7 . عبر عن التقارير التالية باستخدام الرموز ~ ، ∧ ، ∨ ، ⊻ ، ← ، ↔ :

(i) إذا كان س عددا صحيحا فإن س عدد زوجي أو عدد فردي وليس كليهما.

(ii) نقص الأسعار شرط لازم لزيادة الاستهلاك.

(iii) زيادة الإنتاج شرط كافي لنقص الأسعار.

(iv) نقص الأسعار وزيادة الاستهلاك تستلزم زيادة الإنتاج

(v) ليس صحيحا أنه: $س^2 = 4$ فقط إذا كانت $س = 2$

(vi) المضلع يكون مستطيلا إذا وفقط إذا كان على شكل متوازي أضلاع قطراه متساويان في الطول.

(vii) س ∈ أ أو س ∈ ب إذا وفقط إذا كان س ∈ أ ∪ ب

8 . أثبت صحة التقرير الثنائي التالي:

" إذا كانت س عددا حقيقيا فإن:
$س^2 = 4$ إذا وفقط إذا كانت ($س = 2$ أو $س = -2$) "

9 . لدينا التقارير: ن: " φ مجموعة جزئية من كل مجموعة "
، ط: " الصفر عدد موجب " ، ى: " $2 + 5 = 10$ "
، ك: " $7 < 13$ " ، ل: " المعين مضلع منتظم "
، م: " الليل أطول من النهار ".

عين قيمة الصدق (إن أمكن) لكل من التقارير التالية:

(i) ن ∧ ط (ii) ن ∧ ى

(iii) ك ∧ م (iv) ك ∨ ل

(v) ط ∨ ل (vi) ك ∨ م

(vii) (ط ∨ ك) ∨ ل (viii) (ط ∨ ك) ∧ ل

(ix) ط ⊻ ى (x) ط ⊻ م

(xi) ى ← ط (xii) ط ← ى

(xiii) ك ← م　　　(xiv) (ى ← ط) ← ل

(xv) ى ↔ ك　　　(xvi) ك ↔ م

(xvii) ك ← (ط ↔ ل)　　　(xviii) ك ↔ (ط ↔ ل)

(xix) ~ ط ∧ (ك ← ~ ل)　　　(xx) (ط ∧ ى) ↔ (ك ← م)

(xxi) [ط ∨ (ى ∨ ~ ك)] ← (ط ∧ ل)

(xxii) [ر ← ل] ∨ [(ط ← ل) ∧ (ى ← ط)]

10. انفِ التقارير ر، ط، ى، ك، ل، م الواردة في التمرين 9.

11. أكمل الجدول التالي:

أ	ب	~ أ	~ ب	أ ∧ ~ ب	~ أ ∨ ~ ب	~ أ ⊻ ب	~ أ ← (أ ∧ ~ ب)
ص	ص						
ص	خ						
خ	ص						
خ	خ						

12. أكمل الجدول التالي:

أ	ب	~ أ	أ .... ب	أ .... ب	أ ... ب	أ .... ب	~ أ ← ب
ص	ص		ص			خ	
ص	خ		ص	خ	خ		
خ	ص		ص	خ	ص		
خ	خ			خ		خ	

13. استخدم أداة الربط المنطقية المناسبة لربط كل زوج من أزواج التقارير التالية لكي تحصل على تقرير مركب صائب منطقيا:

(i) 2 = 1 + 1 ، القدس مدينة عربية.

(ii) 2 = 1 + 1 ، القدس ليست مدينة عربية.

(iii) 11 = 1 + 1 ، القدس مدينة عربية.

(iv) 11 = 1 + 1 ، القدس ليست مدينة عربية.

14. إذا كانت أ، ب تقريرين غير معينين، كوّن جدول الصدق لكل من التقارير التالية:

(i) ∼(∼أ) ماذا تلاحظ ؟
(ii) ∼(أ ∧ ب) ، ∼أ ∨ ∼ب ماذا تلاحظ ؟
(iii) ∼(أ ∨ ب) ، ∼أ ∧ ∼ب ماذا تلاحظ ؟
(iv) ∼(أ → ب) ، ∼أ ∨ ب ، أ ∧ ∼ب ماذا تلاحظ ؟
(v) ∼(أ ⊻ ب) ، أ ↔ ب ماذا تلاحظ ؟
(vi) أ ∨ (أ ∧ ب) ، (أ ∨ أ) ∨ (أ ∧ ب) ماذا تلاحظ ؟
(vii) (أ ∧ ∼ب) ∨ (ب ∧ ∼أ)
(viii) أ ∧ [∼أ ∧ (∼أ ∧ ∼ب)]
(ix) (أ → أ) ∨ (أ → ∼أ)
(x) (أ ⊻ ∼ب) ↔ (∼أ ∨ ب)

15. أ ، ب ، ح ثلاثة تقارير مدى كل منها {ص ، خ} . كون جدول الصدق لكل من التقارير التالية :

(i) أ ∧ (ب ∨ ح) ، (أ ∧ ب) ∨ (أ ∧ ح) ماذا تلاحظ ؟
(ii) أ ∨ (ب ∧ ح) ، (أ ∨ ب) ∧ (أ ∨ ح) ماذا تلاحظ ؟
(iii) أ ⊻ (ب ⊻ ح) متى يكون هذا التقرير صوابًا ؟
(iv) (أ ⊻ ب) ∧ (أ ↔ ب)
(v) (أ → ب) → ح
(vi) [أ → (ب → ح)] → [(أ → ب) → (أ → ح)]

16. إذا كان ن ، ك تقريران صائبان ، ل ، م أي تقريرين ، فكون جدول الصدق للتقارير التالية :

(i) (ن ∨ ك) → ∼(ل ∨ م)
(ii) (ن ∧ ك) ↔ ∼ل ∧ ∼م
(iii) (ن → ك) → (ل → م)
(iv) (ن → ك) ⊻ [(ل → م) ⊻ (ن → م)]

17. بين نوع كل من التقارير التالية من حيث كونها :
صائبة منطقيًا (توتولوجي) أم خاطئة منطقيًا أم غير معينة منطقيًا :

(i) $\text{أ} \land \sim\text{أ}$ (ii) $\text{أ} \lor \sim\text{أ}$

(iii) $[(\text{أ} \rightarrow \text{ب}) \land \text{أ}] \rightarrow \text{أ}$ (iv) $\text{أ} \lor (\text{أ} \land \text{ب})$

(v) $\text{أ} \land (\sim\text{أ} \lor \text{ب})$ (vi) $[(\text{أ} \lor \text{ب}) \land \sim\text{أ}] \rightarrow \text{ب}$

(vii) $[(\text{أ} \land \text{ب}) \land \sim\text{أ}] \rightarrow \text{ب}$ (viii) $\text{أ} \rightarrow (\text{ب} \rightarrow \text{هـ})$

(ix) $(\text{أ} \rightarrow \text{ب}) \veebar (\text{ب} \rightarrow \text{أ})$

(x) $[(\text{أ} \rightarrow \text{ب}) \land (\text{ب} \rightarrow \text{هـ})] \rightarrow (\text{أ} \rightarrow \text{هـ})$

(xi) $[(\text{أ} \rightarrow \text{ب}) \land (\text{ب} \rightarrow \text{هـ})] \leftrightarrow (\text{أ} \rightarrow \text{هـ})$

(xii) $[(\text{أ} \rightarrow \sim\text{ب}) \land (\sim\text{هـ} \rightarrow \text{ب})] \rightarrow (\sim\text{هـ} \rightarrow \sim\text{أ})$

(xiii) $(\text{أ} \rightarrow \text{ب}) \rightarrow [(\text{أ} \lor \text{هـ}) \rightarrow (\text{ب} \lor \text{هـ})]$

(xiv) $\text{ب} \rightarrow \text{أ}$ حيث ب صواب

(xv) $(\text{أ} \rightarrow \text{ب}) \rightarrow \text{هـ}$ حيث هـ صواب

(xvi) $\sim(\sim\text{أ} \lor \text{ب}) \lor \text{هـ}$ حيث هـ صواب

(xvii) $(\text{أ} \land \sim\text{ب}) \lor (\text{ب} \lor \sim\text{أ})$ حيث ب صواب

(xix) $\text{أ} \land (\sim\text{ب} \lor \text{هـ})$ حيث $(\text{ب} \land \sim\text{هـ})$ خطأ

(xx) $(\text{أ} \rightarrow \text{ب}) \rightarrow (\sim\text{ب} \rightarrow \sim\text{أ})$ حيث ب صواب

الفصل 3
العلاقات المنطقية

[3:1] العلاقات المنطقية

تعرفنا في الفصل السابق للروابط المنطقية، وأوضحنا كيفية استخدام هذه الروابط للحصول على تقارير جديدة، ومن ثم (أو لأسباب أخرى) تسمى هذه الروابط أحيانا "بالعمليات المنطقية".

وفي هذا البند سنتعرض لروابط من نوع آخر تستخدم في الربط بين التقارير ولكنها لا تعطي تقارير جديدة - ومثل هذه الروابط تسمى "العلاقات المنطقية"

وأهم هذه العلاقات المنطقية هما: التضمين، التكافؤ.

[3:1:1] التضمين *Implication*

تعريف: يقال أن أ تتضمن ب إذا كان أ ← ب صواب دائما

- ونعبر عن ذلك رمزيا بالصورة "أ ⟸ ب"
- ويقرأ "أ يؤدي إلى ب".
- عندما أ ⟸ ب نقول أحيانا أن:

"التقرير ب نتيجة صالحة (Valid) للمعطى أ"

مثال: أثبت أن أ∨ب ⟸ أ

الحل: لإثبات أن أ∨ب ⟸ أ يجب أن نثبت أ∨ب ← أ صواب دائما

من الجدول المقابل نلاحظ أن:

أ∨ب ← أ صواب كله

∴ أ∨ب ⟸ أ

أ	ب	أ∨ب	أ∨ب ← أ
ص	ص	ص	ص
ص	خ	ص	ص
خ	ص	ص	ص
خ	خ	خ	ص

مثال: أثبت أنه:

{[(ق ٧ ك) ← هـ] ٨ ق} ⟸ (ق ٨ هـ)

الحل: نكوّن جدول الصدق للتقرير المركب

{[(ق ٧ ك) ← هـ] ٨ ق} ← (ق ٨ هـ)

- وفي هذا المثال سنوضح طريقة أخرى لكتابة جدول الصدق خاصة عندما نحتاج إلى عدد كبير من الأعمدة أو العمليات المنطقية.
وهذه الطريقة تعتمد على إيجاد العمليات المنطقية حسب ترتيبها في التقرير المركب.

{[(ق ٧ ك) ← هـ] ٨ ق} ← (ق ٨ هـ)

	ق	٧	ك	←	هـ	٨	ق	←	ق	٨	هـ
ترتيب العمليات		1		3		4		5		2	
	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
	ص	ص	ص	خ	خ	خ	ص	ص	ص	خ	خ
	ص	ص	خ	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
	ص	ص	خ	خ	خ	خ	ص	ص	ص	خ	خ
	خ	ص	ص	ص	ص	خ	خ	ص	خ	خ	ص
	خ	ص	ص	خ	خ	خ	خ	ص	خ	خ	خ
	خ	خ	خ	ص	ص	خ	خ	ص	خ	خ	ص
	خ	خ	خ	ص	خ	خ	خ	ص	خ	خ	خ

من هذا الجدول نلاحظ أن عمود العملية (5) كله صواب

أي أن {[(ق ٧ ك) ← هـ] ٨ ق} ← (ق ٨ هـ) صواب دائمًا

∴ {[(ق ٧ ك) ← هـ] ٨ ق} ⟸ (ق ٨ هـ) . #

ملاحظات

1. الرمز ⇐ يعبر عن علاقة بين تقريرين وليس أداة ربط (تحليلية)، بينما الرمز ← يعبر عن رابط بين تقريرين.
2. أ ⇐ ب ليس تقريرا مركبا، وبالتالي ليس له جدول صدق.
3. أ ⇐ ب لا تؤدي بالضرورة إلى ب ⇐ أ
أي أن العلاقة ⇐ ليست متماثلة.
4. العلاقة ⇐ هي علاقة ناقلة لأنها عاكسة ومتخالفة وناقلة.
5. أ ⇔ ب تعني (أ ⇐ ب و ب ⇐ أ)
وتسمى ⇔ علاقة "تضمين ثنائي".

مثال: اختبر صلاحية نتيجة التقرير التالي،
"إذا ضيعت الأمانة ظهر الفساد في الأرض، وقد ضيعت الأمانة ومن ثم ظهر الفساد في الأرض"

الحل: نفرض أن أ: ضيعت الأمانة، ب: ظهر الفساد في الأرض
∴ مقدمة التقرير هي: (أ ← ب) ∧ أ
، النتيجة هي: ب
وتعتبر النتيجة صالحة إذا كان [(أ ← ب) ∧ أ] ← ب صائب منطقيا
وللاختبار ذلك ننشئ جدول الصواب التالي:

أ	ب	أ ← ب	(أ ← ب) ∧ أ	التقرير
ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	خ	ص
خ	ص	ص	خ	ص
خ	خ	ص	خ	ص

∵ عمود التقرير كله صواب
∴ التقرير صائب منطقيا، والنتيجة ب صالحة.

[2.1.3] التكافؤ Equivalence

- إذا أخذنا علاقة التضمين الثنائي ⟸⟹ فمن السهل التأكد من أن هذه العلاقة بالنسبة لأي مجموعة من التقارير تكون الخواص الآتية:

i. أ ⟸⟹ أ "عاكسة"

ii. إذا كان أ ⟸⟹ ب فإن ب ⟸⟹ أ "متماثلة"

iii. إذا كان أ ⟸⟹ ب ، ب ⟸⟹ ح فإن أ ⟸⟹ ح "ناقلة".

إذن: علاقة التضمين الثنائي ⟸⟹ هي "علاقة تكافؤ".

ويرمز لهذه العلاقة غالبا بالرمز " ≡ ".

- أ ⟸⟹ ب إذا وفقط إذا كان أ ⟷ ب صواب

أي إذا وفقط إذا كان أ ، ب صوابين معا أو خطأين معا.

- من التعريفين السابقين يمكننا تعريف علاقة التكافؤ بين تقريرين بصيغة منطقية كالتالي:

" يقال للتقريرين أ ، ب إنهما متكافئان منطقيا (وللاختصار متكافئان) إذا كان لهما نفس قيم (جداول) الصدق".

- نعبر عن ذلك رمزيا بالصورة: أ ≡ ب أو أ ⟸⟹ ب

- وتقرأ " أ يكافئ ب".

• لاحظ أن: أ ≡ ب ليس تقريرا مركبا وبالتالي ليس له جدول صدق.

- لإثبات أ ≡ ب

إما أن نوضح أن أ ، ب لهما نفس جدول الصدق

أو نثبت أن أ ⟷ ب صواب دائما (تحصيل حاصل).

مثال: إبحث تكافؤ التقريرين:

أ ∧ ب ، ∼(أ ⟵ ∼ب)

الحل: ننشئ جدول الصدق لبيان قيم الصدق لكل من التقريرين:

أ	ب	~ب	أ ∧ ب	أ → ~ب	~ (أ → ~ب)
ص	ص	خ	ص	خ	ص
ص	خ	ص	خ	ص	خ
خ	ص	خ	خ	ص	خ
خ	خ	ص	خ	ص	خ

من الجدول نلاحظ أن أ ∧ ب ، ~ (أ → ~ب) لهما نفس قيم الصدق

∴ أ ∧ ب ≡ ~ (أ → ~ب)

مثال : أثبت أن أ → (ب ∧ ح) ≡ (أ → ب) ∧ (أ → ح)

الحل : لكي نثبت صحة التكافؤ علينا إثبات أن :

[أ → (ب ∧ ح)] ↔ [(أ → ب) ∧ (أ → ح)] صواب دائماً

[أ	→ ④	(ب	∧ ①	ح)]	↔ 6	[(أ	→ ②	ب)	∧ ⑤	(أ	→ ③	ح)]
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	ص	خ	خ	ص	ص	ص	ص	خ	ص	خ	خ
ص	خ	خ	خ	ص	ص	ص	خ	خ	خ	ص	ص	ص
ص	خ	خ	خ	خ	ص	ص	خ	خ	خ	ص	خ	خ
خ	ص	ص	ص	ص	ص	خ	ص	ص	ص	خ	ص	ص
خ	ص	ص	خ	خ	ص	خ	ص	ص	ص	خ	ص	خ
خ	ص	خ	خ	ص	ص	خ	ص	خ	ص	خ	ص	ص
خ	ص	خ	خ	خ	ص	خ	ص	خ	ص	خ	ص	خ

من الجدول نلاحظ أن العمود السادس تحت العملية 6 كله صواب

∴ أ → (ب ∧ ح) ≡ (أ → ب) ∧ (أ → ح)

ملاحظة : يمكننا الوصول إلى تكافؤ التقريرين عن طريق مقارنة العمودين الثاني و العاشر الممثلين للتقريرين

كما يمكننا أيضاً كتابة جدول الصدق بالطريقة المتبعة في معظم الأمثلة السابقة .

تمارين [1:3]

1. بين صحة أو خطأ كل مما يأتي:

(i) $أ \vee ب \Rightarrow أ$

(ii) $ب \Rightarrow (أ \rightarrow ب)$

(iii) $[(أ \rightarrow ب) \wedge أ] \rightarrow ب$

(iv) $(أ \vee ب) \Rightarrow (أ \wedge ب)$

(v) $[(أ \vee ب) \wedge \sim ب] \Rightarrow أ$

(vi) $[(أ \rightarrow ب) \wedge \sim ب] \Rightarrow \sim أ$

(vii) $أ \wedge (ب \vee جـ) \equiv (أ \wedge ب) \vee (أ \wedge جـ)$

(viii) $(أ \rightarrow ب) \equiv \sim أ \vee ب \equiv (\sim ب \rightarrow \sim أ)$

(ix) $أ \wedge (أ \vee ب) \Leftrightarrow أ$

(x) $[(أ \vee ب) \vee جـ] \wedge [\sim أ \wedge \sim ب] \Rightarrow جـ$

2. بين أي التقارير التالية يكافئ التقرير $أ \rightarrow ب$

(i) $ب \rightarrow أ$ (ii) $\sim أ \vee ب$

(iii) $\sim ب \vee أ$ (iv) $\sim ب \rightarrow أ$

3. تخير أحد الرمزين $\Rightarrow$ ، $\equiv$ لربط كل زوج من أزواج التقارير التالية:

(i) الشكل الرباعي زواياه قائمة ، الشكل الرباعي مستطيل

(ii) س عدد زوجي ، س يقبل القسمة على 2

(iii) المثلث متساوي الأضلاع ، المثلث متساوي الساقين

(iv) $س = 3$ ، $س^2 = 9$

(v) أ ب جـ فيه أ ب > أ جـ ، أ ب جـ فيه ق(جـ) > ق(ب)

4. اختبر صلاحية نتائج التقارير التالية:

(i) إذا كانت $س^2 = 9$ فإن $س = 3$ أو $س = -3$

ولكن $س \neq 3$ إذن $س^2 \neq 9$

(ii) إذا كان $س \in أ \cup ب$ فإن $س \in أ$ أو $س \in ب$

ولكن $س \in أ$ إذن $س \notin ب$

(iii) الطالب لا يستطيع أن يتذكر ليلا ويحل التمارين ،
والطالب لم يحل التمارين وسوف لن يتذكر ليلا .

(iv) إذا ظهر الصياد في الأرض انتفض الساعة ، وقد ظهر
الصياد في الأرض إذن انتفض الساعة .

5 . استخدم جداول الصدق للبرهنة على صحة ما يأتي :

(i) أ ∧ أ ≡ أ

(ii) أ ∨ أ ≡ أ

(iii) أ ∧ ب ≡ ب ∧ أ

(iv) أ ∧ (أ ← ب) ≡ ب

(v) ~ (أ ∧ ~ حـ) ≡ أ ← حـ

(vi) أ ↔ ب ≡ (~ أ ← ~ ب) ∧ (~ ب ← ~ أ)

(vii) أ ↔ ب ≡ (أ ∧ ب) ∨ (~ أ ∧ ~ ب)

(viii) أ ← ب ≡ (أ ∧ ب) ← أ

(ix) أ ⊻ ب ≡ (أ ∨ ب) ∧ ~ (أ ∧ ب)

(x) ~ (أ ⊻ ب) ≡ أ ↔ ب

(xi) ~ (أ ← ب) ≡ أ ∧ ~ ب

(xii) أ ← (ب ← حـ) ≡ (أ ∧ ب) ← حـ

(xiii) ق ∨ ~ ق ⟺ ص أي صواب دائمًا ،

(xiv) ق ∧ ~ ق ⟺ خ أي خطأ دائمًا .

6 . أثبت صحة كل من :

(i) التقرير " ليس صحيحا أن زيد رسب في الامتحان "
يكافئ التقرير " زيد نجح في الامتحان " .

(ii) التقرير " ليس صحيحا أن ، المثلث مختلف الأضلاع أو
مختلف الزوايا "
يكافئ التقرير " المثلث متساوي الأضلاع " .

(iii) التقرير " إذا كان ظا $\theta = 1$ فإن $\theta = 45°$ "
لا يكافئ التقرير " إذا كانت $\theta = 45°$ فإن ظا $\theta = 1$ "
حيث $\theta \in [0°, 360°]$

[2.3] النفي في الحالات العامة

سبق أن أوضحنا أن نفي التقرير م هو ~م ، ويقرأ :

« ليس صحيحاً أن...... » أو « ليس...... » أو « لا...... »

وتلك ماهو الحال عند نفي تقارير مركبة مثل :

- عادل طالب ذكي وسامي طالب مجتهد
- المدرس مجتهد أو الطلاب يتذاكرون دروسهم.
- ينبت الزرع إذا وفقط إذا أمطرت السماء . وهكذا

من البديهي أنه إذا تصدر كل تقرير من هذه التقارير « ليس صحيحاً أن... » نحصل على نفي هذا التقرير - إلا أن هذا الأسلوب يفقد لغة التقرير جمالها اللغوي وتعبيراتها المألوفة لغرابتها على لغتنا العربية .

وهذا ما يدفعنا إلى استخدام أساليب أخرى لنفي التقارير المركبة لتعطينا جملاً مقبولة من الناحية اللغوية .

إلا أن هذه الأساليب قد تحتاج إلى تفكير عميق في بعض الأحيان ولذلك سنعتمد على القاعدة المنطقية التالية عند نفي مثل هذه التقارير .

• **قاعدة** : لأي تقريرين م ، ب يكون :

ق1 . ~(~م) ≡ م

ق2 . ~(م ∧ ب) ≡ ~م ∨ ~ب

ق3 . ~(م ∨ ب) ≡ ~م ∧ ~ب

ق4 . ~(م ⊻ ب) ≡ م ↔ ب

ق5 . ~(م ← ب) ≡ م ∧ ~ب

ق6 . ~(م ↔ ب) ≡ م ⊻ ب   6أ

≡ (~م ∧ ب) ∨ (م ∧ ~ب)   6أ

≡ م ← ~ب   6f

≡ ~م ← ب

ونترك برهان هذه القاعدة كتدريب .

• مثال : اكتب نفي كل من التقارير التالية :

(1) المدرس مجتهد أو الطلاب يذاكرون دروسهم.

(2) لا أحب المذاكرة و اللعب.

(3) أ = 0 أو ب = 0 وليس كليهما.

(4) إذا اشتريت شقة فسوف أتزوج.

(5) سأنال رضا والدي إذا وفقط إذا كنت بارًا بهما.

(6) إذا كان المضلع منتظم فإن: قياسات زواياه متساوية، و أطوال أضلاعه متساوية.

الحل :

(1) نفرض أن أ : "المدرس مجتهد"

، ب : "الطلاب يذاكرون دروسهم".

∴ التقرير المعطى بالصورة : $أ \vee ب$

∵ $\sim(أ \vee ب) \equiv \sim أ \wedge \sim ب$ (ق3)

∴ نفي التقرير هو : "المدرس ليس مجتهد و التلاميذ لا يذاكرون دروسهم".

(2) لتكن أ : "أحب المذاكرة" ، ب : "أحب اللعب"

التقرير المعطى بالصورة $\sim(أ \wedge ب)$ ونفيه $أ \wedge ب$ (ق2)

∴ نفي التقرير هو "أحب المذاكرة واللعب"

(3) التقرير "أ = 0 أو ب = 0 وليس كليهما"

على الصورة $أ \veebar ب$ ونفيه $أ \leftrightarrow ب$ (ق4)

∴ نفي التقرير هو أ = 0 إذا وفقط إذا كان ب = 0

(4) لتكن أ : "اشتريت شقة" ، ب : "سأتزوج"

∴ التقرير المعطى بالصورة : $أ \rightarrow ب$ ونفيه $أ \wedge \sim ب$ (ق5)

∴ نفي التقرير هو : "اشتريت شقة و لم أتزوج".

(5) لتكن أ : "أنال رضا والدي" ، ب : "أكون بارًا بوالدي".

∴ التقرير المعطى بالصورة $أ \leftrightarrow ب$

ونفيه له أربع صيغ وهذه هي.

ويمكن تمثيل نفي التقرير المعطى بإحدى الصيغ التالية :

- لا أنال رضا والدي إذا وفقط إذا كنت بارا بهما .
- أنال رضا والدي إذا وفقط إذا كنت غير بار بهما.
- أنال رضا والدي أو أكون بارا بهما وليس كليهما.

(6) ليكن : م : "المضلع منتظم"

، ب : "قياسات زواياه متساوية"

، ج : "أطوال أضلاعه متساوية".

∴ التقرير المعطى بالصورة : م ⟵ (ب ∧ ج)

ويكون نفيه ~ [م ⟵ (ب ∧ ج)]

≡ م ∧ ~ (ب ∧ ج)

≡ م ∧ (~ب ∨ ~ج)

∴ نفي التقرير هو :

"المضلع منتظم رغم أن قياسات زواياه غير متساوية أو أطوال أضلاعه غير متساوية"

أو "المضلع منتظم رغم عدم تساوي قياسات زواياه و أطوال أضلاعه"

العكس - النفي - النقيض - عكس النقيض للتقرير الشرطي م ⟵ ب

◇ عكس التقرير الشرطي م ⟵ ب هو: ب ⟵ م

أي تتبادل المقدمة والنتيجة الموضع

أو نعكس إتجاه السهم.

◇ نفي (Negation) التقرير الشرطي م ⟵ ب هو: ~ (م ⟵ ب)

مع ملاحظة أن النفي يتم لجمل التقرير (م ⟵ ب) وليس النفي المنفصل لمركبتيه م، ب.

◇ نقيض (Contradiction) التقرير الشرطي م ⟵ ب هو: ~م ⟵ ~ب

أي نستبدل المقدمة بنفيها ، والنتيجة بنفيها .

◇ عكس النقيض (Contrapositive) التقرير الشرطي م ⟵ ب هو: ~ب ⟵ ~م

ويسمى أحيانا "المعكوس المضاد"

• مثال: للتقرير الشرطي "إذا اجتهد التلميذ فإنه ينجح"
مقدمة التقرير هي: "التلميذ يجتهد"
، نتيجة التقرير هي: "التلميذ ينجح".

- عكس التقرير هو: "إذا نجح التلميذ فإنه مجتهد"
- نفي التقرير هو: "ليس صحيحا أنه: إذا اجتهد التلميذ فإنه ينجح"
أو: "التلميذ مجتهد ولم ينجح" (ص 50)
- نقيض التقرير هو: "إذا لم يجتهد التلميذ فإنه لم ينجح"
- عكس النقيض للتقرير هو: "إذا لم ينجح التلميذ فإنه لم يجتهد".

• والسؤال الآن، إذا كان التقرير الشرطي أ ← ب صوابا - هل يؤدي ذلك بالضرورة إلى صواب كل عكسه، نفيه، نقيضه، عكس نقيضه؟
وللإجابة على ذلك ننشئ جدول الصدق التالي مع ملاحظة أن أ ← ب صوابا في ثلاث حالات فقط:

أ	ب	~أ	~ب	التقرير أ ← ب	عكسه ب ← أ	نفيه ~(أ ← ب)	نقيضه ~أ ← ~ب	عكس النقيض ~ب ← ~أ
ص	ص	خ	خ	ص	ص	خ	ص	ص
خ	ص	ص	خ	ص	خ	خ	خ	ص
خ	خ	ص	ص	ص	ص	خ	ص	ص

من الجدول نلاحظ التالي:
• إذا كان التقرير الشرطي أ ← ب صواب دائما فإنه:
- عكسه (ب ← أ) ليس صواب دائما
أي أنه: أ ← ب ⇍ ب ← أ
- نفيه (~(أ ← ب)) خطأ دائما
- نقيضه (~أ ← ~ب) ليس صواب دائما.
أي أنه: أ ← ب ⇍ ~أ ← ~ب

- عكس النقيض ($\sim$ ب $\leftarrow \sim$ م) صواب دائما

أى أنه:

$$م \leftarrow ب \implies \sim ب \leftarrow \sim م$$

• لاحظ أن التقرير م $\leftarrow$ ب، وعكس نقيضه $\sim$ ب $\leftarrow \sim$ م
- على وجه العموم - متكافئين منطقيا.

أى أنه: م $\leftarrow$ ب $\equiv \sim$ ب $\leftarrow \sim$ م

3.3 إستنتاج قيم الصدق لمركبات تقرير علمت قيمة صدقه

فيما سبق كان الإهتمام منصبا على معرفة قيم الصدق لتقرير مركب عن طريق قيم الصدق لتقاريره الجزئية.

وفى هذا البند سنحاول إستنتاج قيم الصدق لبعض (أو إن أمكن كل) مركبات تقرير مركب متى علمت قيم الصدق لهذا التقرير أو لبعض مركباته وذلك باستخدام التعاريف والقواعد المنطقية السابقة.

وهذا ما يتضح من خلال الأمثلة التالية:

• مثال: إذا علم أن (م $\leftarrow$ ب) $\wedge$ م صواب
فاستنتج قيمة الصدق للتقرير ب.

الحل: $\because$ (م $\leftarrow$ ب) $\wedge$ م صواب

$\therefore$ (م $\leftarrow$ ب) صواب، م صواب (قاعدة $\wedge$)

$\Leftarrow$ ب صواب (قاعدة $\leftarrow$)

مثال: إذا علم أن التقرير التالى صواب
"إذا كانت الشركة خاسرة فإن لها مدير،
والشركة ليس لها مدير"
فهل الشركة خاسرة أم ليست خاسرة؟

الحل: نفرض أن م: "الشركة خاسرة"
، ب: "الشركة لها مدير"

من القضية المعطى على الصورة (م ← ب) ∧ ~ ب

• معلوم (م ← ب) ∧ ~ ب صواب

⇐ م ← ب صواب ، ~ ب صواب (قاعدة ∧)

⇐ م ← ب صواب ، ب خطأ (قاعدة ~)

⇐ م خطأ (قاعدة ←)

⇐ ~ م صواب (قاعدة ~)

من الشركة ليست خاسرة .

• مثال: إذا علم أنه ،

[(م ∨ ب) ← (م ∧ ب)] ∧ ب صواب

نستنتج قيمة الصدق للتقرير م .

الحل: [(م ∨ ب) ← (م ∧ ب)] ∧ ب صواب (معطى)

⇐ [(م ∨ ب) ← (م ∧ ب)] صواب ، ب صواب (قاعدة ∧)

⇐ (م ∨ ب) ← (م ∧ ب) صواب ، م ∨ ب صواب (قاعدة ∨)

⇐ م ∧ ب صواب (قاعدة ←)

⇐ م صواب (حيث ب صواب) (قاعدة ∧)

حل آخر: يمكن استنتاج قيمة صدق م من خلال الجدول التالي:

[(م	∨	ب)	←	(م	∧	ب)]	∧	ب	
							ص	ص	" معطى "
			ص					ص	" قاعدة ∧ "
		ص				ص			" لتعويض عن ب "
	ص								" قاعدة ∨ "
					ص				" قاعدة ← "
ص				ص					" قاعدة ∧ "

من السطر الأخير ينتج أنه م صواب

مثال: إذا علم أنه:

[(أ ↔ ب) ∧ ~ب] ∧ [~(أ → ح)] صواب

فاستنتج قيم صدق التقارير أ، ب، ح

الحل: [(أ ↔ ب) ∧ ~ب] ∧ [~(أ → ح)] صواب

⇐ (أ ↔ ب) ∧ ~ب صواب، ~(أ → ح) صواب

⇐ (أ ↔ ب) صواب، ~ب صواب، أ → ح خطأ

⇐ (أ ↔ ب) صواب، ب خطأ، أ → ح خطأ

⇐ أ خطأ، ب خطأ، أ → ح خطأ

⇐ أ خطأ، ب خطأ #

، ∵ أ → ح خطأ، أ خطأ

∴ ح إما صواب أو خطأ #

حل آخر: من خلال الجدول التالي:

القاعدة	أ	↔	ب	∧	~	ب	∧	~	أ	→	ح
"المعطى"							ص				
"قاعدة ∧"				ص				ص			
"قاعدة ~(↔)"		ص			ص					خ	
"قاعدة ~"			خ			خ					
"قاعدة ↔"	خ								خ		
"قاعدة →"											ص أو خ

من الجدول نستنتج أنه

أ خطأ، ب خطأ، ح إما صواب أو خطأ "عشوائية".

• مثال: إذا علمت أنه كلا من التقارير التالية صواب

أ ↔ ب، أ ∨ ح، ح → ~د، د

فاستنتج قيم الصدق للتقارير أ، ب، ح.

الحل : أ ↔ ب صواب ، أ ∨ حـ صواب ، حـ ← ~ء صواب ، ء صواب

⟸ أ ↔ ب صواب ، أ ∨ حـ صواب ، حـ خطأ

⟸ أ ↔ ب صواب ، أ صواب

⟸ أ صواب

∴ أ صواب ، ب صواب ، حـ خطأ.

حل آخر : نكون الجدول التالي مع ملاحظة أن جميع المعطيات ترتبط فيما بينها بالرابط ∧.

(أ ↔ ب) ∧ (أ ∨ حـ) ∧ (حـ ← ~ء) ∧ ء

	(أ ↔ ب)	أ	ب	(أ ∨ حـ)	أ	حـ	(حـ ← ~ء)	حـ	~ء	ء
"معطى"	ص			ص			ص			ص
"قاعدة ~"									خ	
"قاعدة ←"						خ		خ		
"قاعدة ∨"		ص			ص					
"قاعدة ↔"			ص							

من الجدول نستنتج أن :

أ صواب ، ب صواب ، حـ خطأ.

تمارين [2:3]

- أكتب نفي كل من التقارير التالية :

(1) الصفر عدد موجب

(2) العدد الصحيح إما فردي أو زوجي وليس كليهما

(3) 37 عدد غير سالب

(4) تنخفض درجة الحرارة في فصل الصيف وترتفع في فصل الشتاء.

(5) ليس صحيحاً أن المستطيل والمربع متشابهان

(6) حل المسألة باستخدام الجداول الرياضية أو الآلة الحاسبة .

(7) إذا اعتمد الطالب على الغش في الامتحان فإنه يرسب .

(8) سامي يتكلم اللغة الإنجليزية والفرنسية بطلاقة .

(9) تظهر الفصول الأربعة إذا دارت الأرض حول الشمس .

(10) جاء أنطونيوس إلى مصر وأحب كليوباترا وتزوجها .

(11) إذا جاء أنطونيوس إلى مصر أحب كليوباترا وتزوجها .

(12) تعاقب الفصول الأربعة يستلزم حركة الأرض حول الشمس وميل محورها.

(13) الساعة العاشرة صباحاً في القاهرة إذا وفقط إذا كانت الساعة الثامنة صباحاً في لندن .

(14) الطلاب يحافظون على النظام إذا وفقط إذا كان المدرس حازماً ، وإذا لم يحافظوا على النظام فإن المدرس ليس حازماً .

(15) $ب^2 - 4 أ جـ = 0$ شرط لازم وكافٍ لكي يكون للمعادلة $أ س^2 + ب س + جـ = 0$ جذران حقيقيان متساويان .

- أكتب النفي ، العكس ، النقيض ، عكس النقيض لكل من التقارير الشرطية التالية :

(16) إذا كنت تنوي أن تكون سعيداً ،

(17) س عدد فردي ← س² + 1 عدد زوجي

(18) قابلية اشتقاق الدالة عند نقطة شرط كافٍ لاتصالها عند نفس النقطة.

(19) س ≠ 2 إذا كان س² - 1 = 0

(20) س عدد زوجي فقط إذا كان س + 1 عدد فردي.

(21) د(س) = د(ع) ← س = ع

(22) س عدد حقيقي شرط ضروري لكون س عدداً نسبياً.

(23) أ ∩ ب ≠ φ ← أ ≠ φ

(24) إذا علم أن (∼أ) ∧ (أ ∨ ∼ب) صواب
فاستنتج قيمة الصدق للتقرير ب.

(25) استنتج قيمة الصدق للتقرير أ إذا علم أن:
(أ ↔ ب) ∧ (ب ↔ ح) ∧ ح صواب

(26) استنتج قيمة الصدق للتقرير ب إذا علم أن:
[أ ↔ (ب ∨ ح)] ∧ [أ ∧ ∼ح] صواب

(27) استنتج قيمة الصدق للتقرير أ إذا علم أن:
(أ) أ ← ب صواب، ب ← ح صواب، ح خطأ
(ب) أ ← ب خطأ، ب ← ح صواب، ح صواب

(28) استنتج قيم الصدق للتقارير أ، ب، ح إذا علم أن:
[∼(أ ∧ ب)] ∨ [(أ ↔ ب) ∧ (أ ⊻ ح)] خطأ

(29) استنتج قيم الصدق للتقارير أ، ب، ح، د إذا علم أن:
[∼(ب ← أ) ∧ (أ ← ح)] ∧ [ب ← د] صواب.

الفصل 4
منطق الكم

[1.4] الجمل المفتوحة
Open Sentences

سبق أن ذكرنا أن الجمل مثل:

س^2 + 5 = 9

، س + ص = 4

، ..... مدينة عربية

تسمى "جمل مفتوحة" - وهي غير كاملة المعنى - وهذه الجمل وأمثالها بوضعها الراهن لا يمكن الحكم على صواب أو خطأ أى منها - وبالتالي لا تشكل تقارير.

- ولإخضاع هذه الجمل لعلم المنطق أو الرياضيات يجب تحويلها إلى تقارير.
- ولتحويل الجملة المفتوحة إلى تقرير هناك أسلوبين:

• الأسلوب الأول هو ربط الجملة المفتوحة بما يسمى "مجموعة التعويض" لكل متغير في هذه الجملة المفتوحة.

• الأسلوب الثاني هو ربط الجملة المفتوحة بأحد السورين: "كل" ويسمى "السور الكلي" أو "يوجد" ويسمى "السور الجزئي"

وهذه الأسوار تلعب دوراً هاماً في الرياضيات مثل:

لكل س ∈ ح : س + 0 = س

، يوجد س ∈ ح : س^2 = 5

وهذا الأسلوب سيكون موضع اهتمامنا بالدرجة الأولى فيما بعد.

- وكما سبق أن رمزنا للتقارير بالرموز: أ، ب، ج، ......

فإن الجمل المفتوحة يرمز لها غالبا بالرموز:

م(س)، ب(س)، هـ(ص)، ....، د(س،ص)، ....، جـ(س، ص، ع)، ..

حيث س، ص، ع، ..... تعرف بالمتغيرات في الجملة المفتوحة.

- ولتوضيح كيفية تحويل الجمل المفتوحة إلى تقارير نورد الأمثلة التالية:

• مثال: للجملة المفتوحة م(س) : $س^2 + 5 = 9$

1. إذا كانت مجموعة التعويض هي ص (مجموعة الأعداد الصحيحة)

فإن: الجملة م(س) تكون صائبة إذا عوضنا عن س بـ 2 أو -2

وتكون خاطئة إذا عوضنا عن س بأي عدد صحيح خلاف 2، -2.

تسمى المجموعة {-2، 2} "مجموعة الحل" أو "مجموعة الصدق"

ونلاحظ هنا أن الجملة المفتوحة م(س) أمكن الحكم على صوابها أو خطئها ومن ثم فقد تحولت إلى تقرير.

2. إذا كتبت الجملة المفتوحة م(س) : $س^2 + 5 = 9$

بالصورة: لكل عدد صحيح س، $س^2 + 5 = 9$ فإنها تكون خاطئة

وإذا كتبت بالصورة:

يوجد عدد صحيح س : $س^2 + 5 = 9$ فإنها تكون صائبة.

وفي كلتا الصورتين تحولت الجملة المفتوحة إلى تقرير.

• مثال: للجملة المفتوحة د(س) : س دولة عربية

إذا كانت مجموعة التعويض هي {مصر، فرنسا، عمان، كندا، السعودية}

فإنه: عند استبدال المتغير س بـ:

مصر أو عمان أو السعودية فإننا نحصل على تقارير صائبة

أما عند استبدال المتغير س بـ:

فرنسا أو كندا فإننا نحصل على تقارير خاطئة.

وتكون مجموعة الحل (الصدق) للجملة المفتوحة

د(س) : س دولة عربية هي {مصر، عمان، السعودية}

• مثال: أوجد مجموعة الحل للجملة المفتوحة:

ق(س، ص) : س + ص = 4 ، س، ص ∈ ص+

الحل : تكون الجملة ق(س، ص) : س + ص = 4 صائبة عندما

(س، ص) = (1، 3) أو (2، 2) أو (3، 1)

وفيما عدا ذلك تكون الجملة ق(س، ص) خطأ.

∴ مجموعة الحل (الصدق) = {(3، 1)، (2، 2)، (1، 3)}.

الجمل المفتوحة المتكافئة

تعريف | تكون الجملتان المفتوحتان متكافئتين إذا كان لهما نفس مجموعة الحل.

مثال الجمل المفتوحة :

م(س) : س − 3 = 0 ، س ∈ ح

، ق(ص) : ص − 3 = 6 − 4ص ، ص ∈ ح

، ل(ع) : ع − 1 = 2 ، ع ∈ ح

هي جمل متكافئة لأن مجموعة الحل لكل منها هي {3}

• مثال : ابحث تكافؤ الجملتان المفتوحتان :

م(س) : س − 2 = 0 ، ق(س) : $س^2$ = 4

أولاً : إذا كانت مجموعة التعويض لكل منهما هي ط

ثانياً : إذا كانت مجموعة التعويض لكل منهما هي ص

الحل : أولاً : إذا كانت مجموعة التعويض ط :

للجملة م(س) : س − 2 = 0 ⇐ س = 2 ∈ ط

∴ مجموعة الحل للجملة م(س) هي {2}

للجملة ق(س) : $س^2$ = 4 ⇐ س = 2 أو س = −2 ∌ ط

∴ مجموعة الحل للجملة ق(س) هي {2}

وحيث أن الجملتان م(س) ، ق(س) لهما نفس مجموعة الحل

فهما إذن متكافئتين.

ثانياً: إذا كانت مجموعة التعويض ص :

مجموعة الحل للجملة م(س) هي {2}

، مجموعة الحل للجملة ن(س) هي {2، -2}

وحيث أن الجملتان م(س) ، ن(س) ليس لهما نفس مجموعة الحل

منهما إذن غير متكافئتين .

[2 : 4] التقارير المسوّرة
Quantifier Statements

رأينا فيما سبق أنه إذا كان لدينا جملة مفتوحة م(س) مثل

وتم ربطها بأحد السورين "كل" أو "يوجد" فإنها تتحول إلى تقرير

، ومثل هذه التقارير تسمى "تقارير مسوّرة"

كما تسمى كلمة "كل - أو ما يحمل معناها" "بالسور الكلي" ، ويرمز

له رياضياً بالرمز " ∀ ".

كما تسمى كلمة "يوجد - أو يحمل معناها" "بالسور الجزئي"، ويرمز

له رياضياً بالرمز " ∃ ".

- وفيما يلي نعرض لهذين السورين لشيء من التفصيل :

[1 : 2 : 4] السور الكلي (∀) Universal Quantifier

إذا كانت ص مجموعة التعويض للجملة المفتوحة م(س) فإنه

أي تعبير من التعبيرات التالية يسمى "تقرير مسوّر كلياً"

لكل س ∋ ص : م(س) ، أ

لجميع قيم س ∋ ص : م(س) ، أ

لأي س ∋ ص : م(س) ، أ

إذا كانت س ∋ ص فإن م(س) ، أ

م(س) : مهما كانت س ∋ ص

ونعبر عن ذلك رمزيا بالصورة : " $\forall$ س $\in$ س : م(س) "

أو بالصورة : " $\forall$ س : س $\in$ س $\longleftarrow$ م(س) "

ويسمى الرمز " $\forall$ " "سورًا كليًا".

- ومن أمثلة التقادير المسورة كليًا :

- لكل عدد حقيقي س يكون $(س-2)^2 = س^2 - 4س + 4$

ونعبر عنه رمزيا بالصورة :

$\forall$ س $\in$ ح : $(س-2)^2 = س^2 - 4س + 4$ ، أو

$\forall$ س : س $\in$ ح $\longleftarrow$ $(س-2)^2 = س^2 - 4س + 4$

- أى مربع مستطيل

ونعبر عنه رمزيا بالصورة :

$\forall$ س : س مربع $\longleftarrow$ س مستطيل .

- إذا كان س عددا طبيعيا فإنه يكون زوجيا أو فرديا وليس كليهما

ونعبر عنه رمزيا بالصورة :

$\forall$ س $\in$ ط : (س عدد زوجى) $\underline{\vee}$ (س عدد فردى)

- س + 0 = س مهما كانت قيمة س الحقيقية .

ونعبر عنه رمزيا بالصورة :

$\forall$ س $\in$ ح : س + 0 = س

ملاحظة : في كثير من التقادير المسورة كليا قد لا يظهر السور الكلى في التقرير بشكل صريح وإنما يفهم من سياق النص وهذا راجع إلى طبيعة العلم الذى نتناوله وأسلوب الكتابة فيه فمثلا :

في حساب المثلثات ، جا2س = 2جاس جتاس يعنى أنه

$\forall$ س : جا2س = 2جاس جتاس

ويفهم ضمنيًا أيضًا أن السور $\forall$ عائد إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

• في التفاضل $\frac{d}{dس}(س^ن) = ن س^{ن-1}$ وهذا يعني أنه:

$\forall ن \in ط : \frac{d}{dس}(س^ن) = ن س^{ن-1}$

[2:2:4] السور الجزئي (الوجودي) ($\exists$)
Existential Quantifier

إذا كانت س مجموعة التعويض للجملة المفتوحة م(س) فإن أي من التعبيرات:

يوجد على الأقل س $\in$ س : م(س) ، أو

يوجد س $\in$ س : م(س) ، أو

لبعض قيم س $\in$ س : م(س)

يسمى "تقرير مسوّر جزئيًا"

ونعبر عنه رمزيا بالصورة: $\exists$ س $\in$ س : م(س)

أو بالصورة : $\exists$ س : س $\in$ س $\longrightarrow$ م(س)

ويسمى الرمز "$\exists$" "السور الجزئي" أو "الوجودي".

- ومن أمثلة التقارير المسورة جزئيًا :

• يوجد عدد حقيقي س بحيث س + 1 = 3 - وتكتب رمزيا بالصورة:

$\exists$ س $\in$ ح : س + 1 = 3 .

• بعض المضلعات الرباعية قياسات زواياها متساوية

وتكتب رمزيا بالصورة :

$\exists$ س : س مضلع رباعي $\longrightarrow$ س قياسات زواياه متساوية .

• هنالك دوال متصلة وغير قابلة للاشتقاق

وتكتب رمزيا بالصورة :

$\exists$ د : (د متصلة) $\wedge$ (د غير قابلة للاشتقاق).

ملاحظات

(1) هناك ألفاظ أخرى تعبر عن السور الجزئي ($\exists$) مثل: «معظم»، «أقل»...

فمثلاً نقول: معظم (أغلبية) الطلاب ناجحون.

ونقول: أقلية من الطلاب حصلوا على الدرجة النهائية.

فالأسوار في مثل هذه الحالات تعبر عن الجزئية لأنها لا تدل على الكلية.

ومع ذلك فالمناطقة أمثال "هاملتون"، "دي مورجان" لا يعترفون بمثل هذه الألفاظ كأسوار، واكتفوا بالسور "البعض" الذي يكفيان استنتاجه من هذين السورين والعكس ليس صحيحاً.

فعندما نقول: «معظم الطلاب ناجحون» فإننا نستنتج منه أن: «بعض الطلاب ناجحون». بينما إذا قلنا «بعض الطلاب ناجحون» فإن استنتاج التعبير «بعض الطلاب ناجحون» غير ممكن.

- المهم أن ندرك أن السور ($\exists$) يعني «وجود واحد على الأقل» ولا مانع من وجود أكثر من واحد.

فمقارنة التقريرين:

- $\exists$ س : س عدد زوجي وأولي.
- $\exists$ س : س عدد زوجي.

فالتقرير الأول يكون صائباً في حالة واحدة فقط عندما س = 2

أما التقرير الثاني فيكون صائباً لكثير من الأعداد - أي أنه: يوجد على الأقل عدد زوجي.

(2) نعلم مما سبق أن التقرير جملة خبرية إما صواب أو خطأ وليس كليهما في آن واحد - ومثل هذه التقارير الواردة كجمل خبرية تسمى "التقارير الوحيدة" أو "القضايا الوحيدة".

- وفي هذا الفصل تعرضنا لتقارير تحمل في مضمونها جملاً مفتوحة، ومثل هذه التقارير تحمل معنى أشمل وأعم من التقارير الخبرية السابقة حيث أن كل تعويض عن قيم المتغيرات يعطي تقريراً وحيداً يختلف عن الآخر - لذا نسمي مثل هذه التقارير أحياناً

« التقارير (القضايا) العامة ».
- والمنطق الذى يهتم بدراسة هذه التقارير العامة يسمى
« منطق الحكم Predicate Logic »
كما يسمى السور الكلى ($\forall$) أحيانا « الكم الشامل » أو
« أداة القياس الكلية (الشاملة) ».
ويسمى السور الجزئى ($\exists$) أحيانا « الكم الجزئى » أو
« أداة القياس الوجودية (الجزئية) ».

• مثال: ضع كلا مما يأتى فى صورة رمزية:

(1) كل الأعداد الحقيقية أعداد مركبة.

(2) أى عدد فردى يمكن وضعه فى الصورة $2ن - 1$ ، $ن \in ص^+$

(3) $جا^2 أ + جتا^2 أ = 1$

(4) لأى دالة د: إذا كانت د متصلة وقابلة للاشتقاق فإنها تكون قابلة للتكامل.

(5) بعض المثلثات مضلعات منتظمة.

(6) يوجد حل للمعادلة $2س = 5$ حيث س عدد نسبى.

الحل:

(1) $\forall س : س \in ح \longrightarrow س \in ك$

(2) $\forall س$: س عدد فردى $\longrightarrow س = 2ن - 1$ ، $ن \in ص^+$

(3) $\forall أ : جا^2 أ + جتا^2 أ = 1$

(4) $\forall د$: [(د متصلة) $\wedge$ (د قابلة للاشتقاق)] $\longrightarrow$ د قابلة للتكامل.

(5) $\exists \triangle$: $\triangle$ مثلث $\longrightarrow \triangle$ مضلع منتظم.

(6) $\exists س \in ن$: $2س = 5$.

ملحوظة: الأسوار $\forall$ ، $\exists$ لا يمتد تأثيرها على جميع مكونات الجملة المركبة التالية لها ، بل يمتد تأثيرها فقط إلى أول جملة أو أول جملة بين قوسين تالية لها.

[3-4] تحديد قيم الصدق للتقارير المسورة

تعريف (i) التقرير المسور كلياً " $\forall$ س : م(س) " يكون صائباً إذا وفقط إذا كانت مجموعة الحل تساوي مجموعة التعويض.
أو إذا كان كل تعويض عن س بعنصر من عناصر مجموعة التعويض — لا — بجعل م(ل) صائبة.

(ii) التقرير المسور كلياً " $\forall$ س : م(س) " يكون خطأ إذا وفقط إذا كانت مجموعة الحل لا تساوي المجموعة الشاملة.
أو إذا كان هناك تعويض واحد على الأقل عن س — أ مثلاً — يجعل م(أ) غير صائبة (خطأ).

• مثال: عين قيم الصدق لكل من التقارير التالية:

(1) $\forall$ س $\in$ ص : (س موجب) $\underline{\vee}$ (س سالب)

(2) $\forall$ س $\in$ ح : $\sqrt{س^2} = |س|$

(3) $\forall$ س $\in \{0 ، 1 ، 2\}$: $س^3 - 3س^2 + 2س = 0$

(4) $\forall$ س $\in$ ط : $س^3 - 3س^2 + 2س = 0$

الحل:

(1) مجموعة الحل = $\{... ، -3 ، -2 ، -1 ، 1 ، 2 ، 3 ، ...\}$
$=$ ص $- \{0\} \neq$ ص

$\therefore$ التقرير خطأ.

(2) التقرير صواب حسب التعريف الرياضي.

(3) س $= 0 \Leftarrow (0)^3 - 3(0)^2 + 2(0) = 0 \Leftarrow$ س $= 0$ حل

س $= 1 \Leftarrow (1)^3 - 3(1)^2 + 2(1) = 0 \Leftarrow$ س $= 1$ حل

س $= 2 \Leftarrow (2)^3 - 3(2)^2 + 2(2) = 0 \Leftarrow$ س $= 2$ حل

$\therefore$ مجموعة التعويض هي مجموعة حل

$\therefore$ التقرير صواب.

(4) $\because$ المعادلة $س^3 - 3س^2 + 2س = 0$ من الدرجة الثالثة

$\therefore$ مجموعة الحل تحتوي على ثلاثة حلول على الأكثر

$\therefore$ مجموعة الحل $\neq$ ط وبالتالي: التقرير خطأ.

تعريف

(أ) التقرير المسور جزئياً "$\exists$ س : م(س)" يكون صائباً إذا وفقط إذا كانت مجموعة الحل غير خالية، أو إذا وجد تعويض واحد على الأقل -مثل أ- يجعل م(أ) تقريراً صائباً.

(ب) التقرير المسور جزئياً "$\exists$ س : م(س)" يكون خطأً إذا وفقط إذا كانت مجموعة الحل خالية (ϕ) أو إذا كان كل تعويض عن س يعطي تقريراً خاطئاً.

• مثال: عين قيمة الصدق لكل من التقارير التالية:

(1) $\exists$ س $\in$ ح : س$^2 + 1 = 0$

(2) $\exists$ س $\in$ ك : س$^2 + 1 = 0$

(3) $\exists$ س $\in$ ص : $\frac{\text{س}}{2} \in$ ص

(4) $\exists$ س $\in$ ح : جا^{2}س + جتا^{2}س $= 3$

الحل:

(1) س$^2 + 1 = 0$ $\Leftarrow$ س$^2 = -1$ $\Leftarrow$ س $\notin$ ح

∴ مجموعة الحل = ϕ

∴ التقرير خطأ

(2) س$^2 + 1 = 0$ $\Leftarrow$ س $= \pm$ ت حيث ت $= \sqrt{-1}$

∴ مجموعة الحل = $\{$-ت ، ت$\} \neq \phi$

∴ التقرير صواب.

(3) عندما س = أي عدد زوجي فإن $\frac{\text{س}}{2} \in$ ص

∴ مجموعة الحل $\neq \phi$ ∴ التقرير صواب.

(4) من حساب المثلثات نعلم أن جا^{2}س + جتا^{2}س $= 1$

∴ جا^{2}س + جتا^{2}س $\neq 3$ مهما كانت قيمة س

∴ التقرير خطأ.

تمارين [1:4]

1 . أكتب ثلاث جمل مفتوحة تحتوى على متغير واحد، وثلاث جمل تحتوى متغيرين ثم استبدل المتغير فى كل جملة بقيم ثابتة بعضها يجعل الجملة تقريراً صائباً والبعض الآخر يجعلها تقريراً خاطئاً .

2 . أوجد مجموعة الحل لكل من الجمل المفتوحة التالية :

(i) $س < 4$ ، س عدد طبيعى

(ii) $س^2 - 3س - 4 = 0$ ، س عدد صحيح

(iii) $س^2 - 3س - 4 = 0$ ، س عدد طبيعى

(iv) $س^2 + 2 = 0$ ، س عدد حقيقى .

(v) س مضلع رباعى طولا قطراه متساويان ، س ∈ مجموعة المضلعات الرباعية .

(vi) س كلية تتبع جامعة . ، س إحدى كليات جامعة عين شمس .

(vii) {(س ، ص ، ع) : س + ص + ع = 3 ، س ، ص ، ع ∈ ص+ }

3 . إدرس تكافؤ كل من أزواج الجمل المفتوحة التالية :

(i) س عنصر ينتمى لمجموعة {0 ، 1 ، 2 ، 3}
، س < 4 حيث س ∈ ط .

(ii) س = 3
، $س^2 - 9 = 0$ حيث س ∈ ط

(iii) $2س^2 - 7س + 6 = 0$ ؛ س ∈ ط
، $3س^2 - 7س + 2 = 0$ ؛ س ∈ ط

(iv) قطرا المضلع الرباعى (س) متساويان فى الطول وينصف كل منهما الآخر
، المضلع الرباعى (س) زواياه قوائم
حيث س ∈ مجموعة المضلعات الرباعية .

(v) قطرا المضلع الرباعى (س) متساويان فى الطول ومتعامدان
، المضلع الرباعى (س) مضلع منتظم .
حيث س ∈ مجموعة المضلعات الرباعية .

(vi) $س^2 - س - 6 = 0$ ؛ س ∈ ط

، $ص^2 = 9$ ‏ : $ص \in ط$

4 . عبر عن كل من التقارير التالية باستخدام الرموز المنطقية :

(i) كل عدد طبيعي هو عدد صحيح .

(ii) بعض الأعداد الفردية تكون أولية .

(iii) يوجد عدد زوجي س حيث س عدد أولي .

(iv) يوجد عدد صحيح يكون زوجيا وأوليا .

(v) هناك دوال متصلة عند نقطة وغير قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة .

(vi) $\lim_{ن \to \infty} ر^ن$ لها وجود عندما $|ر| < 1$

(vii) يوجد س بحيث $س = \lim_{ن \to \infty} \frac{1}{ن}$

5 . ضع السور المناسب لتحصل على تقرير صواب لكل مما يأتي :

(i) $(س + 1)^2 = س^2 + 2س + 1$

(ii) $\sqrt{س^2} = س$

(iii) $\sqrt{س^2} = -س$

(iv) $س ص = 6$

(v) $س^2 + ص^2 \geq 0$

(vi) $|س + ص| \leq |س| + |ص|$

(vii) $|س + ص| = |س| + |ص|$

6 . لتكن م(س) : س مضلع منتظم

ن(س) : س مضلع أطوال أضلاعه متساوية

هـ(س) : س مضلع قياسات زواياه متساوية

د(س) : س مضلع مجموع قياسات زواياه 360°

عبر عن كل من التقارير التالية لفظيا ثم بين قيمة الصدق لها :

(i) $\forall$ س : م(س) $\longrightarrow$ ن(س)

(ii) $\forall$ س : م(س) $\longrightarrow$ هـ(س)

(iii) $\forall$ س : م(س) $\longrightarrow$ ن(س) $\wedge$ هـ(س)

(iv) $\exists$ س : ن(س) $\longrightarrow$ م(س)

(v) $\exists$ س : ه(س) ⟵ م(س)

(vi) $\forall$ س : م(س) ⟵ ك(س)

(vii) $\exists$ س : م(س) ⟵ ك(س)

7 . عين قيمة الصدق لكل من التقارير التالية علماً بأن مجموعة التعويض هي ع :

(i) $\forall$س : س^2 ≥ 0

(ii) $\forall$س : س^2 ≥ 0 ⟵ 2 < 5

(iii) $\forall$س : س^2 < 0 ⟵ 2 < 5

(iv) $\exists$س : (س^2 - 2 = 0 ⟵ س^2 = 4)

(v) $\exists$س : (س مثلث قائم الزاوية ⟵ س مثلث متساوي الساقين)

(vi) 1 > 2 ⟵ $\exists$س : س < 3

(vii) $\exists$ س : س + 1 > س^2

(viii) $\forall$س : س + 1 > س^2

(ix) $\forall$س : $\frac{س^2 - 4}{س - 2}$ = س + 2

(x) $\exists$ س : $\frac{س^2 - 4}{س - 2}$ = س + 2

(xi) $\forall$س : $\frac{س^2 - 4}{س - 2}$ = س + 2 ⟵ 3 عدد أولي

8 . اكتب التقارير التالية بصورة منطقية ثم عين قيمة الصدق لكل منها :

(i) جميع المثلثات المتشابهة متطابقة .

(ii) بعض المثلثات المتشابهة متطابقة .

(iii) كل المضلعات المتطابقة متشابهة .

(iv) إذا كانت كل المثلثات المتساوية الأضلاع حادة الزوايا فقد يوجد بعض المثلثات حادة الزوايا ليست مثلثات متساوية الأضلاع .

(v) الدالة د زوجية إذا وفقط إذا كان لكل س ، -س ∈ مجال د يكون د(-س) = د(س) .

[4:4] المسوّرات المركبة
Complicated Quantifiers

يظهر السوريه $\forall$ ، $\exists$ معاً عادة في بعض التعبيرات الرياضية مثل :

- لكل س ولكل ص يكون $(س + ص)^2 = س^2 + 2 س ص + ص^2$

ونعبر عنه رمزياً بالصورة:

$\forall$ س $\forall$ ص : $(س + ص)^2 = س^2 + 2 س ص + ص^2$

- لكل س يوجد ص بحيث $3^{س} = ص$

ونعبر عنه رمزياً بالصورة :

$\forall$ س $\exists$ ص : $3^{س} = ص$

- يوجد س بحيث لكل ص يكون : $س = ص^2$

ونعبر عنه رمزياً بالصورة :

$\exists$ س $\forall$ ص : $س = ص^2$

- يوجد س ويوجد ص بحيث س + ص = 6 ، س ص = 8

ونعبر عنه رمزياً بالصورة :

$\exists$ س $\exists$ ص : (س + ص = 6 $\wedge$ س ص = 8)

∴ السوريه $\forall$ ، $\exists$ يظهران معاً بإحدى الصور الأربع التالية :

$\forall$ س $\forall$ ص : م (س ، ص)
$\forall$ س $\exists$ ص : م (س ، ص)
$\exists$ س $\forall$ ص : م (س ، ص)
$\exists$ س $\exists$ ص : م (س ، ص)

وتتحدد قيمة الصدق لكل من هذه الصور بناء على تحديد مجموعة التعويض لكل من س ، ص ، والتعاريف التالية .

تحديد قيم الصدق للمسورات المركبة

تعريف (1) التقرير " $\forall$ س $\forall$ ص : م (س ، ص) " يكون صائباً إذا وفقط

إذا كان كل تعويض عن س ، ص بعنصرين ك ، ل حيث ك ∈ مجموعة تعويض س ، ل ∈ مجموعة تعويض ص يجعل التقرير م (ك ، ل) صائبًا .

• مثال : عين قيمة الصدق للتقرير " ∀س ∀ص : س + ص ≥ ص "
إذا كانت مجموعة التعويض لكل من س ، ص هي :
أولًا : {0 ، 1} ثانيًا : {-1 ، 0 ، 1}

الحل : أولًا : من الجدول المقابل نلاحظ أن : كل تعويض عن س ، ص نحصل منه تقرير صائب

س \ ص	0	1
0	0+0=0≥0	0+1=1≥1
1	1+0=1≥0	1+1=2≥1

∴ التقرير " ∀س ∀ص : س + ص ≥ ص " صائبًا .

ثانيًا : عند التعويض عن س بـ -1 ، وعن ص بـ 1 يصبح التقرير
-1 + 1 ≥ 1 ⟸ 0 ≥ 1 وهو تقرير خاطئ
∴ التقرير " ∀س ∀ص : س + ص ≥ ص " خطأ .

تعريف (2) التقرير " ∀س ∃ص : م (س ، ص) يكون صائبًا إذا وفقط إذا كان كل تعويض عن س بـ ك ∈ مجموعة التعويض س يجعل التقرير : " ∃ص : م (ك ، ص) " صائبًا

• مثال : عين قيمة الصدق للتقرير " ∀س ∃ص : س + ص = 3 "
إذا كانت مجموعة التعويض لكل من س ، ص هي {0 ، 1 ، 2 ، 3} .

الحل :
س = 0 ⟸ ∃ص : 0 + ص = 3 وهي تقرير صائب عندما ص = 3
س = 1 ⟸ ∃ص : 1 + ص = 3 وهي تقرير صائب عندما ص = 2
س = 2 ⟸ ∃ص : 2 + ص = 3 وهي تقرير صائب عندما ص = 1
س = 3 ⟸ ∃ص : 3 + ص = 3 وهي تقرير صائب عندما ص = 0

∴ $\forall$ س $\in \{0، 1، 2، 3\}$ يكون التقرير

$\exists$ ص $\in \{0، 1، 2، 3\}$: س + ص = 3 صائبًا

∴ التقرير " $\forall$ س $\exists$ ص : س + ص = 3 " صائبًا .

تعريف (3) | التقرير $\exists$ س $\forall$ ص : م(س ، ص) يكون صائبًا إذا وفقط إذا وجد تعويض واحد على الأقل عن س - م مثلا يجعل التقرير " $\forall$ ص : م (م ، ص) صائبًا".

• مثال : عين قيمة الصدق للتقرير " $\exists$ س $\forall$ ص : س × ص = ص"

إذا كانت مجموعة التعويض لكل من س ، ص هي :

أولا : $\{1، 2، 3\}$ ثانيا : $\{2، 3\}$.

الحل : أولا : عندما س = 1 يكون لدينا التقرير

$\forall$ ص : 1 × ص = ص

وهو صائب $\forall$ ص $\in \{1، 2، 3\}$

∴ التقرير " $\exists$ س $\forall$ ص : س ص = ص " صائبًا .

ثانيا : عندما س = 2 ⇐ $\forall$ ص : 2ص = ص خطأ

عندما س = 3 ⇐ $\forall$ ص : 3ص = ص خطأ

∴ لا يوجد أي تعويض عن س يجعل التقرير

" $\forall$ ص : م ص = ص ، م $\in \{2، 3\}$ " صائبًا .

∴ التقرير " $\exists$ س $\forall$ ص : س ص = ص " خاطئ .

تعريف (4) | التقرير " $\exists$ س $\exists$ ص : م (س ، ص) " يكون صائبًا إذا وفقط إذا وجد تعويض واحد على الأقل عن س - مثل م - وتعويض واحد على الأقل عن ص - مثل ب - يجعل التقرير " م(م ، ب) صائبًا " .

• مثال : عين قيمة الصدق للتقرير $\exists$ س $\exists$ ص : س - ص = ص - س

علما بأن مجموعة التعويض لـ س ، ص هي ح .

الحل : عندما س = ص = 3 نجد يصبح التقرير

$3-3 = 3-3$ صائبًا

∴ التقرير " $\exists$ س $\exists$ ص : س - ص = ص - س " صائبًا .

• مثال : أثبت أن التقرير :

" $\exists$ ص $\forall$ س : م(س، ص) ⟵ $\forall$ س $\exists$ ص : م(س، ص) "

صائب منطقيًا (تحصيل حاصل) .

الحل : لكي نثبت صحة هذا التقرير يكفي فقط أن نثبت أنه :

إذا كان " $\exists$ ص $\forall$ س : م(س، ص) " صواب فإن

$\forall$ س $\exists$ ص : م(س، ص) " صواب أيضا

والسبب في هذا الاكتفاء أن التقرير المعطى صواب بالضرورة

في الاحتمالات الأخرى مهما كانت قيمة الصدق لمركبته .

- نفرض أن : $\exists$ ص $\forall$ س : م(س، ص) صواب

∴ يوجد تعويض عن ص - ب مثلاً - يجعل : $\forall$ س : م(س، ب) صوابا

∴ $\forall$ س $\exists$ ص = ب : م(س، ب) صوابا

⟸ $\forall$ س $\exists$ ص : م(س، ص) صوابا .

∴ $\exists$ ص $\forall$ س : م(س، ص) ⟵ $\forall$ س $\exists$ ص : م(س، ص)

صائب منطقيًا (تحصيل حاصل) .

• مثال : أثبت أن التقرير :

$\forall$ س : م(س) ⟵ $\exists$ س : م(س) صائب منطقيًا .

الحل : نفرض أن التقرير $\forall$ س : م(س) صائب

∴ مجموعة الحل له = مجموعة التعويض $\neq \phi$

∴ التقرير $\exists$ س : م(س) صائب

∴ $\forall$ س : م(س) ⟵ $\exists$ س : م(س) صائب منطقيًا .

• مثال: هل التقرير:

$\forall$س: [م$_1$(س) $\vee$ م$_2$(س)] $\rightarrow$ [($\forall$س: م$_1$(س)) $\vee$ ($\forall$س: م$_2$(س))]

صائب منطقيا ؟

الحل:

1	2	3	4	5
$\forall$س: م$_1$(س)	$\forall$س: م$_2$(س)	$\forall$س: م$_1$ $\vee$ م$_2$	($\forall$س: م$_1$) $\vee$ ($\forall$س: م$_2$)	$\rightarrow$
ص	ص		ص	ص
ص	خ		ص	ص
خ	ص		ص	ص
خ	خ	ص أو خ	خ	؟؟

من الجدول نلاحظ أنه:

- العمود الرابع - وهو عمود التوالي لأداة الربط $\rightarrow$ "صواب في ثلاث حالات وبالتالي لسنا بحاجة إلى تحديد قيم الصدق المناظرة لها في العمود الثالث - وهو عمود المقدمات لأداة الربط $\rightarrow$"
لأنه مهما كانت قيم الصدق في هذه الحالات فإن التقرير م $\rightarrow$ يكون صواب،

لذا كان الحكم على صواب أو خطأ التقرير المعطى من خلال الحالة الرابعة للعمود الثالث وحيث أنه:

المقدمة: ص أو خ   والتالي خ

وحيث أن {ص، ص} $\rightarrow$ {خ}   غير معين منطقيا

من التقرير:

$\forall$س: [م$_1$(س) $\vee$ م$_2$(س)] $\rightarrow$ [($\forall$س: م$_1$(س)) $\vee$ ($\forall$س: م$_2$(س))]

غير صائب منطقيا (غير معين منطقيا)

[4:5] نفي التقارير المسوّرة

تأمل أزواج التقارير التالية :

- كل الطلاب يذاكرون ، بعض الطلاب لا يذاكرون
- بعض الأعداد زوجية ، كل الأعداد ليست زوجية .
- $\exists$ س $\in$ ح : س^2 = -1 ، $\forall$ س $\in$ ح : س^2 $\neq$ -1
- جميع الدول العربية لا تقع في قارة أفريقيا ، بعض الدول العربية تقع في قارة أفريقيا .

وبالتأمل في كل زوج من أزواج هذه التقارير نجد أن كلا من التقريرين هو نفي للتقرير الآخر .

وبمقارنة كل تقرير مع نفيه نلاحظ أنه :

عند نفي التقرير المسور فإننا نستبدل السور الكلي ($\forall$) بالسور الجزئي ($\exists$) والعكس ثم نقوم بنفي الجملة التالية لهذا السور وهذا ما سنثبته في النظرية التالية :

نظرية

1. ~ [$\forall$ س : م(س)] $\equiv$ $\exists$ س : ~م(س)
2. ~ [$\exists$ س : م(س)] $\equiv$ $\forall$ س : ~ م(س)

الإثبات : 1. نفرض أن ~ [$\forall$ س : م(س)] صوابا

$\Longleftrightarrow$ $\forall$ س : م(س) خطأ

$\Longleftrightarrow$ يوجد تعويض عن س = م شرط يجعل م(م) خطأ

$\Longleftrightarrow$ يوجد التعويض عن س = م يجعل ~ م(م) صوابا

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ س : ~ م(س) صوابا

$\therefore$ ~ [$\forall$ س : م(س)] $\equiv$ $\exists$ س : ~م(س)

2. ~ [$\exists$ س : م(س)] صواب

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ س : م(س) خطأ

$\Leftrightarrow$ أي تعويض عن س بـ م يجعل م(م) خطأ

$\Leftrightarrow$ أي تعويض عن س بـ م يجعل ~م(م) صواب

$\Leftrightarrow \forall$ س : ~م(س) صواب

∴ ~ [$\exists$ س ، م(س)] ≡ $\forall$ س : ~ م(س)

نتيجة

1. $\forall$ س : م(س) ≡ ~ [$\exists$ س : ~ م(س)]
2. $\exists$ س : م(س) ≡ ~ [$\forall$ س : ~ م(س)]

- بتطبيق القاعدة ~ (~ م) = م على النظرية السابقة نحصل مباشرة على هذه النتيجة ،

مثال : انفِ التقارير التالية :

(1) $\forall$ س ∈ ح : س^2 > 0

(2) $\forall$ س $\exists$ ص : س + ص = 3

(3) يوجد عددين حقيقيين أ ، ب : أ > ب أو أ < ب

(4) لكل عدد حقيقي معكوس ضربي

(5) $\forall$ س $\forall$ ص $\exists$ ع : س ص = ع

الحل :

(1) ~ [$\forall$ س ∈ ح ، س^2 > 0]

$\Leftrightarrow \exists$ س ∈ ح : س^2 ≯ 0

$\Leftrightarrow \exists$ س ∈ ح : س^2 ≤ 0

(2) ~ [$\forall$ س $\exists$ ص : س + ص = 3]

$\Leftrightarrow \exists$ س : ~ [$\exists$ ص : س + ص = 3]

$\Leftrightarrow \exists$ س $\forall$ ص : س + ص ≠ 3

(3) التقرير بالصورة $\exists$ أ $\exists$ ب : (أ > ب) . (أ < ب)

∴ ~ [$\exists$ أ $\exists$ ب : (أ > ب) V (أ < ب)]

$\Leftrightarrow \forall$ أ : ~ [$\exists$ ب : (أ > ب) V (أ < ب)]

$\Leftrightarrow \forall$ أ $\forall$ ب : ~ [(أ > ب) V (أ < ب)]

⟺ ∀أ∀ب : ~(أ < ب) ∧ ~(أ > ب)

⟺ ∀أ∀ب : (أ ≥ ب) ∧ (أ ≤ ب)

(4) المقترح " لكل عدد حقيقي معكوس ضربي "

نعبر عنه رمزيا بالصورة:

∀س ∈ ح : (س ∈ ح ⟶ ∃ص ∈ ح : س ص = 1)

ونفيه هو:

~[∀س ∈ ح : (س ∈ ح ⟶ ∃ص ∈ ح : س ص = 1)]

⟺ ∃س : ~(س ∈ ح ⟶ ∃ص ∈ ح : س ص = 1)

⟺ ∃س : (س ∈ ح) ∧ ~(∃ص ∈ ح : س ص = 1)

⟺ ∃س : (س ∈ ح) ∧ (∀ص ∈ ح : س ص ≠ 1)

• حل آخر: يمكن التعبير عن المقترح " لكل عدد حقيقي معكوس ضربي " بالصورة:

∀س ∃ص : س ص = 1

∴ ~[∀س ∃ص : س ص = 1]

⟺ ∃س : ~(∃ص : س ص = 1)

⟺ ∃س ∀ص : س ص ≠ 1

- يمكن التعبير لفظيا عن نفي المقترح بالصيغة:

" يوجد عدد حقيقي ليس له معكوس ضربي "

أو " بعض الأعداد الحقيقية ليس لها معكوس ضربي ".

(5) ~[∀س ∀ص ∃ع : س ص = ع]

⟺ ∃س : ~[∀ص ∃ع : س ص = ع]

⟺ ∃س ∃ص : ~[∃ع : س ص = ع]

⟺ ∃س ∃ص ∀ع : س ص ≠ ع

مثال: لدينا التعريف التالي لنهاية دالة عند نقطة

" يقال أنه نهــا د(س) = ل إذا وفقط إذا كانت:
(س ← أ)

∀ و > 0 يوجد هـ > 0 بحيث

|د(س) − ل| < و عندما 0 < |س − أ| < هـ "

أولاً: عبر عن هذا التعريف بالرموز المنطقية.

ثانياً: عبر عن نفيه بالرموز المنطقية.

والحل: أولاً: (نهــا د(س) = ل) ⟷
(س ← أ)

(∀ و > 0 ∃ هـ > 0 ؛ 0 < |س − أ| < هـ ⟶ |د(س) − ل| < و)

ثانياً: التعبير بالصورة أ ⟷ ب

ونفي هذا التعبير له صيغ متعددة منها:

~ (أ ⟷ ب) ≡ أ ⟷ ~ب

∴ ~ [نهــا د(س) = ل ⟷ (∀ و > 0 ∃ هـ > 0 ؛
(س ← أ)
0 < |س − أ| < هـ ⟶ |د(س) − ل| < و)

⟺ نهــا د(س) = ل ⟷ ~ (∀ و > 0 ∃ هـ > 0 ؛
(س ← أ)
0 < |س − أ| < هـ ⟶ |د(س) − ل| < و)

⟺ نهــا د(س) = ل ⟷ [∃ و > 0 ∀ هـ > 0 ؛
(س ← أ)
~ (0 < |س − أ| < هـ ⟶ |د(س) − ل| < و)]

⟺ نهــا د(س) = ل ⟷ (∃ و > 0 ∀ هـ > 0 ؛
(س ← أ)
(0 < |س − أ| < هـ) ∧ |د(س) − ل| ≥ و)

• حاول نفي التعريف السابق بأساليب أخرى.

تمارين [2:4]

1 . عبر عن كل مما يأتي باستخدام الرموز المنطقية :

(i) لكل س ، ص يكون س + ص = ص + س

(ii) لكل س يوجد ص بحيث $هـ^{س}$ = ص

(iii) يوجد س بحيث لكل ص يكون س . ص = 4 .

(iv) يوجد س ، ص بحيث يكون $س^{3}$ = ص

(v) تستطيع خداع بعض الناس كل الوقت ، وكل الناس بعض الوقت ، ولكن لا تستطيع خداع كل الناس كل الوقت .

2 . عين قيمة الصدق لكل من التقارير التالية إذا كانت مجموعة التعويض {0 ، 1 ، 2} .

(i) ∀س ∀ص : س + ص = ص + س

(ii) ∀س ∀ص : ص > س

(iii) ∃س ∀ص : س > ص + 1

(iv) ∃س ∀ص : س ≥ ص

(v) ∃س ∃ص : س + 1 = 2ص

(vi) ∃س ∀ص : ~ (ص = س)

(vii) ∃س ∀ص : س ص = س

(viii) ∃س ∃ص : $\frac{س}{ص} = \sqrt{2}$

(ix) (∀س ∃ص : س − ص = 0) ← (1 > 2)

(x) (∀س ∃ص : س − ص = 0) ← (2 > 1)

(xi) ∀ص ∃س ∀ع : س ص = س ع .

3 . أعد نفس السؤال السابق إذا كانت مجموعة التعويض هي ح

4 . بين قيمة الصدق لكل مما يأتي باعتبار مجموعة التعويض هي ص (مجموعة الأعداد الصحيحة) .

(i) ∀س ∃ص : س < ص

(ii) ∃ص ∀س : س < ص

(iii) (∀س ∃ص : س < ص) ← (∃ص ∀س : س < ص)

(iv) (∃ص ∀س : س < ص) ← (∀س ∃ص : س < ص)

5 . لتكن م(س) : س ≥ 5 ، ن(س) : س < 5
ومجموعة التعويض لهما هي ح - عين قيمة الصدق لكل مما يأتي :

(i) ∀س : م(س)

(ii) ∀س : ن(س)

(iii) ∀س : م(س) ∨ ن(س)

(iv) ∀س : م(س) ∨ ن(س) ← (∀س : م(س)) ∨ (∀س : ن(س))

(v) (∀س : م(س)) ∨ (∀س : ن(س)) ← ∀س : م(س) ∨ ن(س)

(vi) ∃س : م(س) ∧ ن(س) ← (∀س : م(س)) ∧ (∀س : ن(س))

(vii) (∀س : م(س)) ∧ (∀س : ن(س)) ← ∃س : م(س) ∧ ن(س)

(viii) (∃س : م(س)) ∧ (∃س : ن(س)) ← ∃س : م(س) ∧ ن(س)

6 . أعد نفس السؤال السابق إذا كانت
م(س) : س² > س ، ن(س) : س < س + 1

7 . استخدم الأسوار في نفي كل من التقارير التالية - وبين ما إذا كان التقرير أم نفيه هو الصواب .

(i) كل مستطيل هو متوازي أضلاع

(ii) كل متوازي أضلاع هو مستطيل

(iii) بعض المثلثات المتطابقة متشابهة .

(iv) جميع المثلثات المتطابقة متشابهة .

(v) بعض المعادلات لها حل .

(vi) إذا كان المثلث متساوي الساقين فإنه يكون متساوي الأضلاع .

(vii) توجد أعداد نسبية محصورة بين 0 ، 1

(viii) يوجد لكل إنسان على الأقل إنسان آخر يحبه .

(ix) ∀س ∈ ح : س² < 0

(x) $\exists$ س $\in$ ح : س^2 < ٥

(xi) $\forall$ س (عدد صحيح زوجي) : س^2 يقبل القسمة على 4 ،

(xii) $\exists$ س $\in$ ص : $1 <$ س < 2

(xiii) $\exists$ س $\in$ ن : $1 <$ س < 2

(xiv) $\forall$ س ، ص $\in$ ح : س + ص = 5

(xv) $\forall$ س ، ص ، ع $\in$ ح : (س + ص + ع)^2 =

= س^2 + ص^2 + ع^2 + 2 س ص + 2 ص ع + 2 ع س .

8 . انف كلاً من التقارير التالية :

(i) يوجد لكل دولة من دول العالم عاصمة واحدة .

(ii) $\forall$ س (عدد صحيح) $\exists$ ص (عدد نسبي) : س + 1 > ص > س

(iii) $\exists$ عددان صحيحان س ، ص $\forall$ عدد نسبي ع : ع = $\frac{س}{ص}$

(iv) ($\exists$ س : أ(س)) $\wedge$ ($\forall$ س : ب(س))

(v) ($\exists$ س : أ(س)) $\vee$ ($\forall$ س : ب(س))

(vi) ($\exists$ س : أ(س)) $\underline{\vee}$ ($\forall$ س : ب(س))

(vii) ($\exists$ س : أ(س)) $\longrightarrow$ ($\forall$ س : ب(س))

(viii) ($\exists$ س : أ(س)) $\longleftrightarrow$ ($\forall$ س : ب(س))

(ix) $\exists$ س $\forall$ ص : س ص < 3

(x) $\forall$ س $\exists$ ص : س < ص $\longrightarrow$ س^2 < ص^2

(xi) $\forall$ س $\exists$ ص $\forall$ ع : س ص = ع

(xii) $\forall$ و $\exists$ هـ $\forall$ س : | س - أ | < هـ $\longrightarrow$ | د(س) - ل | < و

9 . فى كل مما يأتى تعريفات رياضية مشهورة - فعبر عن كل منها برموز منطقية ثم اكتب نفى كل منها :

(i) الدالة د تكون زوجية إذا وفقط إذا كان لكل س ، -س تنتمى إلى مجال د تكون د(-س) = د(س)

(ii) الدالة د تكون أحادية (one to one Cor.) إذا وفقط إذا كان لكل س ولكل ص :
إذا كانت د(س) = د(ص) فإن س = ص

(iii) الدالة د تكون فوقية (onto) إذا وفقط إذا كان :
لكل ص ∈ المجال المقابل يوجد س ∈ المجال بحيث
د(س) = ص

(iv) الدالة د تكون محدودة إذا وفقط إذا وجد عدد ك بحيث لكل س يكون |د(س)| ≤ ك

(v) يقال أن م هو المحايد للعملية * على الفئة س إذا كان لكل س ∈ س يكون س * م = م * س .

(vi) نهـا د(س) = ل إذا كان لكل ε > 0 يوجد عدد س ← ∞ حقيقي م بحيث |د(س) - ل| < ε لكل س > م .

الفصل 5
التطبيقات العلمية للمنطق

[1:5] المنطق والدوائر الكهربية

[أ] تتكون الدائرة الكهربية البسيطة عادة من مصدر للطاقة (بطارية مثلا) ، ومن جهاز إخراج (لمبة مثلا) ، ومفتاح (م) ثنائى الحالة (بمعنى أنه إما مغلق on أو مفتوح off) كما فى شكل (1)

فإذا رمزنا للمفتاح (م) عندما يكون مغلقا on - أى عندما يسرى التيار فى الدائرة الكهربية - بالرقم الثنائى "1" ، ورمزنا للمفتاح (م) عندما يكون غير مغلق off - أى عندما لا يسرى التيار فى الدائرة الكهربية - بالرقم الثنائى "0" فإننا نرى أن:

شكل (1)

اللمبة تضئ إذا كانت م = 1 ، وأن اللمبة لا تضئ إذا كانت م = 0 . ∴ معنى ذلك أن قيمة الخرج للدائرة الكهربية السابقة تناظر منطقيا قيمة الصدق للتقرير م حيث :
1 يناظر ص ، 0 يناظر خ

[ب] إذا أخذنا دائرة كهربية بها مفتاحين ثنائيين م ، ب موصلين على التوالى كما فى شكل (2) فإننا نلاحظ أن :

اللمبة سوف تضئ فقط عندما يكون كل من المفتاحين أ ، ب مغلقًا.
أى عندما أ = 1 ، ب = 1 فإن اللمبة تضئ.
ويمثل خرج الدائرة الكهربية فى هذه الحالة رقميا بالرقم "1".

شكل (2)

أما فى الحالات الثلاث أ = ، ب = .
أى أ = 0 ، ب = 1
أى أ = 0 ، ب = 0
فإن اللمبة لا تضئ - ويمثل خرج الدائرة الكهربية فى كل من هذه الحالات الثلاث بالرقم "0".

- ويبين الجدول المقابل التوافيق الممكنة للمفتاحين أ ، ب مع بيان ضوء الخرج فى كل حالة.

أ	ب	ضوء الخرج
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

وإذا اعتبرنا أن المفتاحين أ ، ب يمثلان منطقيا تقريرين ، وأن الرقم (1) يمثل صواب التقرير ، والرقم الثانى (0) يمثل خطأ التقرير فإن الجدول السابق يتفق تماما مع جدول الصدق للتقرير أ ∧ ب.

- معنى ذلك أن الدائرة الكهربية التى تحوى مفتاحين ثنائيين أ ، ب متصلين على التوالى تعمل بطريقة تتفق مع أداة الوصل "AND" و لذا تسمى هذه الدائرة بدائرة "الوصل (العطف) المنطقية" ويرمز لها منطقيا بالرمز أ ∧ ب.

- من الجدول السابق يمكننا كتابة العلاقات التالية:

1 ∧ 1 = 1 ، 1 ∧ 0 = 0 ، 0 ∧ 1 = 0 ، 0 ∧ 0 = 0

[جـ] إذا أخذنا دائرة كهربية لمفتاحين ثنائيين أ ، ب موصلين على التوازى كما فى شكل (3)
فإننا نجد أن:
اللمبة سوف تضئ إذا كان:

شكل (3)

المفتاح أ مغلقا أو المفتاح ب مغلقا أو أ ، ب مغلقين معا .

- وبأسلوب آخر نقول أنه :

اللمبة لا تضيء عندما يكون كل من المفتاحين أ ، ب مفتوحا .

- وباستخدام التمثيل الرقمي لوضعي المفتاحين أ ، ب تكون التوافيق الممكنة للمفتاحين أ ، ب مع بيان ضوء المخرج في كل حالة كما هو موضح في الجدول المقابل .

أ	ب	ضوء المخرج
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- وكما أشرنا سابقا : إذا اعتبرنا أحد المفتاحين أ ، ب عبارة تقريرية فإن الجدول المقابل يتفق تماما مع جدول الصدق للتقرير أ ∨ ب

لذا تسمى الدائرة السابقة بدائرة الفصل " أو " "OR" - ويرمز لها منطقيا بالرمز أ ∨ ب .

- نعني ذلك أنه : الدائرة الكهربية التي تحوي مفتاحين ثنائيين متصلين على التوازي تعمل بطريقة تناظر عمل أداة الفصل " أو " "OR" .

ومن الجدول يمكننا كتابة العلاقات التالية :

$$0 = 0 \vee 0 ، \quad 1 = 1 \vee 0 ، \quad 1 = 0 \vee 1 ، \quad 1 = 1 \vee 1$$

مثال : ارسم الدوائر الكهربية التي تتفق عملها مع التقارير التالية .

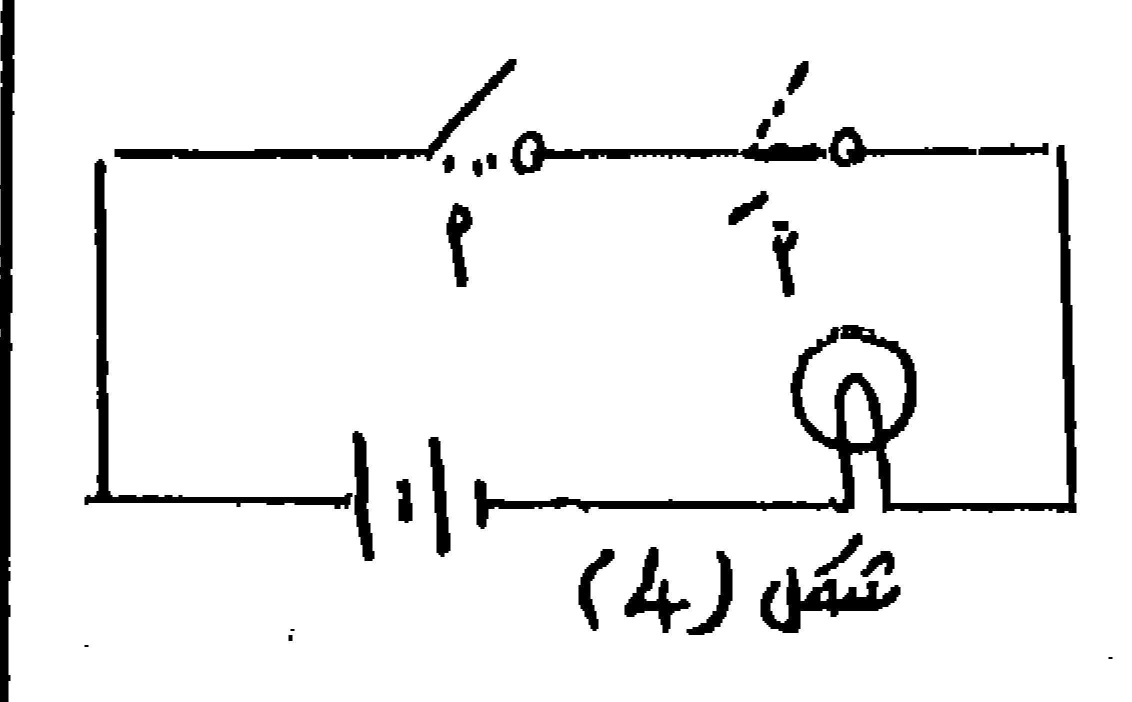
مبينا ضوء المخرج لكل دائرة :

(i) أ ∧ ~أ (ii) أ ∨ ~أ

(iii) أ ∧ (أ ∨ ب) (iv) أ ∨ (ب ∧ ح)

الحل (i) شكل (4) يمثل الدائرة الكهربية المناظرة للتقرير أ ∧ ~أ

وهي تتضمن مفتاحين أ ، أ̄ متصلين على التوالي ويعملان بطريقة متبادلة فيما بينهما . أي أنه أ̄ يمثل ~أ



شكل (4)

وفي هذه الدائرة نجد أنه:

إذا كانت م = 1 (م مغلق) فإن $\bar{م}$ = 0 ($\bar{م}$ مفتوح) ويكون 1 ∧ 0 = 0

وإذا كانت م = 0 (م مفتوح) فإن $\bar{م}$ = 1 ($\bar{م}$ مغلق) ويكون 0 ∧ 1 = 0

أي أن النتيجة في كلتا الحالتين = 0 (اللمبة لا تضيء في الحالتين).

وهذا يتفق مع القول المنطقي: م ∧ ~م خطأ دائماً.

(أأ) الدائرة الكهربية التي تمثل التعبير م ∨ ~م كما في شكل (5)
وهي تتضمن مفتاحين م، $\bar{م}$ متصلين على التوازي ويعملان بطريقة متبادلة فيما بينهما - أي $\bar{م}$ تمثل ~م

شكل (5)

ونلاحظ في هذه الدائرة أن اللمبة تضيء دائماً لأنه:

إذا كانت م = 1 فإن $\bar{م}$ = 0 ويكون 1 ∨ 0 = 1

وإذا كانت م = 0 فإن $\bar{م}$ = 1 ويكون 0 ∨ 1 = 1

أي أن النتيجة في كلتا الحالتين = 1 (اللمبة تضيء في الحالتين).

وهذا يتفق مع القول المنطقي: م ∨ ~م صواب دائماً.

(أأأ) شكل (6) يمثل الدائرة الكهربية للتعبير م ∧ (م ∨ ب)
ونلاحظ في هذه الدائرة أن اللمبة تضيء فقط إذا كان المفتاح م مغلقاً (م = 1) بغض النظر عن كون المفتاح ب مغلقاً أو مفتوحاً.

شكل (6)

معنى ذلك أن عمل هذه الدائرة تتفق مع عمل دائرة بها المفتاح م فقط: شكل (7)

شكل (7)

وهذا يدعونا للقول بأن الدائرتين الموضحتين في شكل (6) وشكل (7)
متعادلتين، وأن الدائرة في شكل (7) هي تبسيط للدائرة في شكل (6)

- وفي المنطق إذا أخذنا القضيتين أ $\wedge$ (أ $\vee$ ب) ، أ
سنجد أنهما متكافئتان.

(17) شكل (8) يمثل الدائرة الكهربية التي تمثل القضية أ $\vee$ (ب $\wedge$ جـ)

شكل (8)

ونظراً لأن هذه الدائرة تحوي ثلاثة مفاتيح فإن عدد الإمكانيات لتشغيل هذه المفاتيح = 2^3

أ	ب	جـ	ب $\wedge$ جـ	ضوء المصباح
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

ونلاحظ أن:
اللمبة تضيء في حالتين:
الحالة الأولى: عندما يكون المفتاح أ مغلقاً بغض النظر عن وضعي المفتاحين ب ، جـ .
الحالة الثانية: عندما يكون المفتاحين ب ، جـ مغلقين معاً بغض النظر عن وضع المفتاح أ .

■ والسؤال الآن:
هل هناك دوائر كهربية ذات شكل خاص لكل من القضايا المنطقية
أ $\vee$ ب ، أ ← ب ، أ ↔ ب ؟
نعلم أن المفاتيح في الدوائر الكهربية توصل فيما بينها بطريقتين فقط وهما
إما التوصيل على التوالي - وهو ما عبرنا عنه منطقياً بالرمز $\wedge$
أو التوصيل على التوازي - وهو ما عبرنا عنه منطقياً بالرمز $\vee$
- معنى ذلك أنه ، لكي نرسم دائرة كهربية تمثل قضية ما يجب أن

تكون أدوات الربط المستخدمة في كتابة هذا المقرر هي "$\wedge$" أو "$\vee$"

إذن عند رسم دوائر كهربية للتقارير أ $\veebar$ ب ، أ $\rightarrow$ ب ، أ $\leftrightarrow$ ب

يجب أن نعبر عن كل منها بصورة أخرى مكافئة لا تحوي سوى $\wedge$ ، $\vee$.

ويمكننا بسهولة أن نثبت صحة ما يأتي :

$$\text{أ} \veebar \text{ب} \equiv (\text{أ} \wedge \sim\text{ب}) \vee (\sim\text{أ} \wedge \text{ب})$$

$$\text{أ} \rightarrow \text{ب} \equiv \sim\text{أ} \vee \text{ب}$$

$$\text{أ} \leftrightarrow \text{ب} \equiv (\sim\text{أ} \vee \text{ب}) \wedge (\sim\text{ب} \vee \text{أ})$$

• مثال : ارسم الدوائر الكهربية التي تمثل التقارير

أ $\veebar$ ب ، أ $\rightarrow$ ب ، أ $\leftrightarrow$ ب

ثم اكتب قيمة الخرج في الدوائر الثلاث عندما أ = 1 ، ب = 0

الحل • الدائرة الكهربية التي تمثل التقرير أ $\veebar$ ب هي التي تمثل التقرير المكافئ $(\text{أ} \wedge \sim\text{ب}) \vee (\sim\text{أ} \wedge \text{ب})$ كما بشكل (9)

شكل (9)

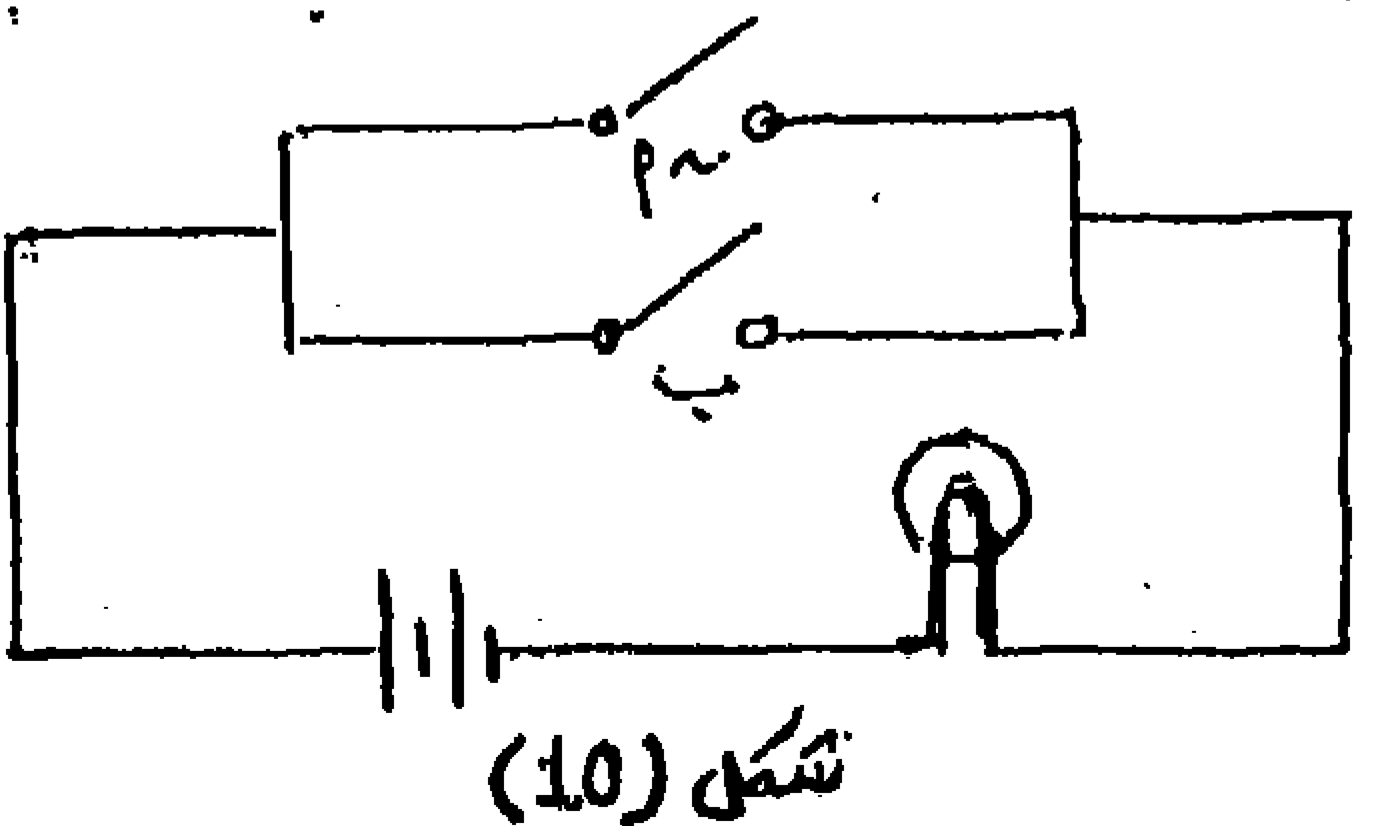
، عندما أ = 1 ، ب = 0 فإن :

$$\text{قيمة الخرج} = (\text{أ} \wedge \sim\text{ب}) \vee (\sim\text{أ} \wedge \text{ب})$$

$$= (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) = 1 \vee 0 = 1$$

معنى ذلك أنه عندما يكون المفتاح أ (on) والمفتاح ب (off) فإن اللمبة تضيء.

• الدائرة الكهربية التي تمثل التقرير أ $\rightarrow$ ب هي التي تمثل التقرير المكافئ $\sim\text{أ} \vee \text{ب}$ وهي كما في شكل (10) .

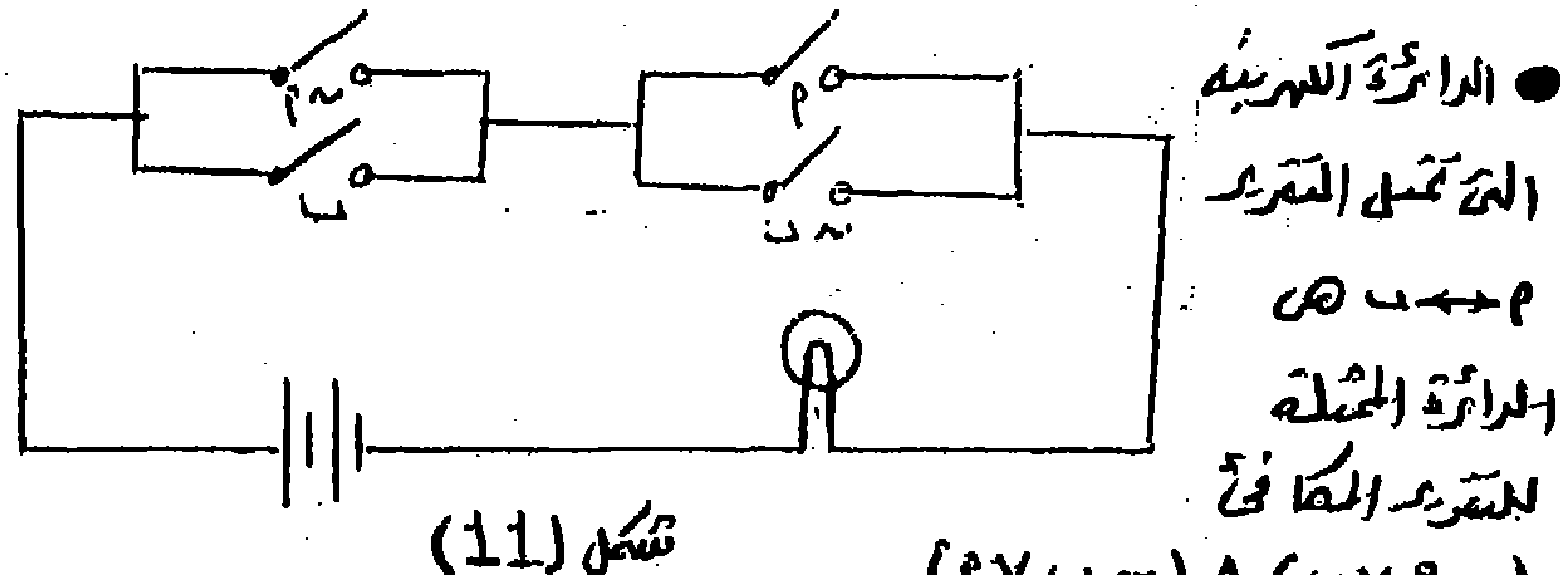


شكل (10)

، عندما أ = 1 ، ب = 0 فإن :

قيمة الزوج = ~أ ∨ ب = ٥ ∨ ٥ = ٥

أي أن اللمبة لا تضيء.



شكل (11)

● الدائرة الكهربية التي تمثل التعبير أ ↔ ب هي الدائرة الممثلة للتعبير المكافئ (~أ ∨ ب) ∧ (~ب ∨ أ) كما في شكل (11) .

وعندما أ = ١ ، ب = ٥ فإن

قيمة الزوج = (~أ ∨ ب) ∧ (~ب ∨ أ)

= (٥ ∨ ٥) ∧ (١ ∨ ١)

= ٥ ∧ ١ = ٥

أي أن اللمبة لا تضيء.

تمارين [1:5]

1. ارسم الدوائر الكهربية التي يتفق عملها مع التقارير التالية مبينا ضوء الخرج لكل دائرة :

(أ) ~ (أ ∧ ب)   (ii) ~ (أ ∨ ب)

(iii) أ ∨ (أ ∧ ب)   (iv) أ ∧ (ب ∨ حـ)

(v) (أ ∨ ب) ∧ (ب ∨ حـ)   (vi) أ ← (ب ∧ حـ)

2. منزل مكون من ثلاثة أدوار يراد إنارة سلم هذا المنزل بمصباح واحد. صمم دائرة كهربية لإنارة هذا المصباح من أي دور من الأدوار الثلاثة.

3. لجنة مكونة من ثلاثة أشخاص يريدون الاقتراع على قرار ما - وأن القرار سيصدر عندما تكون هناك أغلبية موافقة.
صمم دائرة كهربية يصوت عن طريقها الأعضاء بالضغط على مفاتيح في الدائرة وبحيث تعطي ضوءا في حالة حصول القرار على الأغلبية علما بأن كل عضو لابد أن يصوت على القرار.

4. أعد نفس السؤال السابق إذا كان القرار يصدر بالأغلبية المطلقة.

5. لجنة مكونة من أربعة أشخاص يقترعون على قرار معين - وأن القرار سيصدر عندما يكون الجميع موافقون.
صمم دائرة كهربية يصوت عن طريقها الأعضاء بحيث تعطي ضوءا في حالة موافقة الجميع ولا تضيء في الحالات الأخرى.

6. وحدة فراغية مكونة من رئيس وثلاثة أعضاء، وتقوم هذه الوحدة بتنفيذ عملياتها في أي من الحالات الآتية:
موافقة الأعضاء الثلاثة   أو موافقة الرئيس وعضو على الأقل
صمم دائرة كهربية تعطي ضوءا في الحالات التي يتم فيها الموافقة على القيام بإحدى العمليات.

2:5 الجبر البولى
Boolean Algebra

[أ] إذا اعتبرنا أن الرقم الثنائى "1" يشير إلى:
سريان التيار فى الدوائر الكهربية، صواب التقرير فى المنطق الرياضى، المجموعة الشاملة ش فى جبر المجموعات.
وأن الرقم الثنائى "0" يشير إلى:
عدم سريان التيار فى الدوائر الكهربية، خطأ التقرير فى المنطق الرياضى، المجموعة الخالية ϕ فى جبر المجموعات.
ثم قارنا بين: عملية التوصيل على التوالى (التوازى) فى الدوائر الكهربية، عملية (أداة) الربط $\wedge$ ($\vee$) فى المنطق الرياضى، عملية التقاطع $\cap$ (الاتحاد $\cup$) فى جبر المجموعات
سنجد أن هذه العمليات لها خواص متشابهة.

[ب] أيضا إذا اعتبرنا أن $\bar{P}$ يرمز لمفتاح يعمل بطريقة معاكسة للمفتاح P فى الدوائر الكهربية، ويرمز إلى نفى P (أى $\sim P$) فى المنطق الرياضى، ويرمز إلى مكملة الفئة P فى جبر المجموعات.
ثم قارنا بين: العاكس فى الدوائر الكهربية (الثنائية)، والنفى فى المنطق الرياضى، والإكمال فى جبر الفئات سنجد أن لهما خواص متشابهة.

• وقد أوحت المفاهيم السابقة إلى العالم الإنجليزى جورج بول (1813-1864) ببناء تركيب رياضى يسمى "الجبر البولى Boolean Algebra"

- والجبر البولى يعتبر أحد أشكال المنطق الرمزى والذى يبين كيفية عمل الدوائر الثنائية (مثل الدوائر الكهربية والدوائر الالكترونية والبوابات المنطقية)

- ويبنى الجبر البولى على الأساس التالى:

لتكن ب مجموعة من العناصر (المتغيرات) أ، ب، حـ، ... بالإضافة إلى العنصرين 1، 0 (الموضح مدلولهما سابقاً).

ونعرف على هذه المجموعة ب العمليات الثلاث التالية :

- العملية الثنائية (×) : وهي تناظر أداة الربط ∧ في المنطق الرياضي وعملية التقاطع ∩ في جبر المجموعات.

- العملية الثنائية (+) : وهي تناظر أداة الربط ∨ في المنطق الرياضي وعملية الاتحاد ∪ في جبر المجموعات.

- العملية الأحادية (¯) : وهي تناظر النفي (~) في المنطق الرياضي والإكمال في جبر المجموعات.

• الرباعي (ب، ×، +، ¯) في الجبر البولي يخضع للمسلمات أو القوانين التالية :

لأي ثلاثة عناصر أ، ب، حـ ∈ ب :

ب 1 قوانين اللانمو Idempotent Laws

(i) أ × أ = أ (ii) أ + أ = أ

ب 2 قوانين التبادل Commutative Laws

(i) أ × ب = ب × أ (ii) أ + ب = ب + أ

ب 3 قوانين الدمج Associative Laws

(i) (أ × ب) × حـ = أ × (ب × حـ) = أ × ب × حـ

(ii) (أ + ب) + حـ = أ + (ب + حـ) = أ + ب + حـ

ب 4 قوانين المحايد Identity Laws

(i) أ × 1 = أ (ii) أ + 0 = أ

ب 5 قوانين المحدودية Boundedness Laws

(i) أ × 0 = 0 (ii) أ + 1 = 1

ب 6 قوانين التوزيع Distributative Laws

(i) أ × (ب + حـ) = (أ × ب) + (أ × حـ)

(ii) أ + (ب × حـ) = (أ + ب) × (أ + حـ)

ب 7. قوانين الامتصاص (الاختزال) **Absorption Laws**

(i) $\text{أ} \times (\text{أ} + \text{ب}) = \text{أ}$ (ii) $\text{أ} + (\text{أ} \times \text{ب}) = \text{أ}$

ب 8. قوانين الإكمال **Complement Laws**

(i) $\text{أ} \times \bar{\text{أ}} = 0$ (ii) $\text{أ} + \bar{\text{أ}} = 1$

ب 9. قوانين دي مورجان **De morgan's Laws**

(i) $\overline{\text{أ} \times \text{ب}} = \bar{\text{أ}} + \bar{\text{ب}}$ (ii) $\overline{\text{أ} + \text{ب}} = \bar{\text{أ}} \times \bar{\text{ب}}$

ب 10. (i) $\bar{1} = 0$ (ii) $\bar{0} = 1$

ب 11. $\bar{\bar{\text{أ}}} = \text{أ}$

ملاحظات:

1. علاقة التساوي المستخدمة في القوانين السابقة تناظر علاقة التكافؤ $\equiv$ في المنطق الرياضي
2. في التعبير البولي أ × ب يُهمل أحيانا الرمز × وتكتب في صورة أ ب
3. في التعبيرات البولية يمكن إهمال الأقواس أحيانا. وفي هذه الحالة يجب أن يكون معلوما أن × تسبق + فمثلا أ × ب + جـ تعني (أ × ب) + جـ
4. يمكن تطبيق مبدأ الثنائية Duality على القوانين البولية من ب1 إلى ب10 السابقة. بمعنى أنه إذا أخذنا أي علاقة سابقة وقمنا بتبديل العمليتين + ، × كل مكان الأخرى وبتبديل العنصرين المحايدين 0 ، 1 كل مكان الآخر فإننا نحصل على علاقة مناظرة صحيحة.

وجدير بالذكر أنه يمكن تطبيق مبدأ الثنائية على أي تعبير بولي لنحصل منه على تعبير بولي آخر. ويسمى كل منهما "تعبيرًا مرافقا للآخر".

وعلى ذلك نلاحظ أنه إذا أخذنا العلاقات البولية ب1: i ، ب2: i ، ... ، ب10: i وطبقنا عليها مبدأ الثنائية فإننا نحصل على مرافقاتها ب1: ii ، ب2: ii ، ... ، ب10: ii

ومن أجل ذلك يسمى مبدأ الثنائية أحيانا "بمبدأ الترافق".

5.	$\text{أ} \to \text{ب} = \bar{\text{أ}} + \text{ب}$ $\text{أ} \leftrightarrow \text{ب} = (\bar{\text{أ}} + \text{ب})(\bar{\text{ب}} + \text{أ})$	

• مثال: أثبت أنه: $(\text{أ}+\text{ب}) \times \bar{\text{أ}} = \bar{\text{أ}}\,\text{ب}$

الحل: $(\text{أ}+\text{ب}) \times \bar{\text{أ}} = \bar{\text{أ}} \times (\text{أ}+\text{ب})$ حسب i-2

$= (\bar{\text{أ}} \times \text{أ}) + (\bar{\text{أ}} \times \text{ب})$ حسب i-6

$= 0 + (\bar{\text{أ}} \times \text{ب})$ حسب i-8

$= \bar{\text{أ}} \times \text{ب} = \bar{\text{أ}}\,\text{ب}$ حسب ii-4

• مثال: أثبت أنه: $\text{أ} \times \text{ب} + \text{أ} \times \bar{\text{ب}} = \text{أ}$

الحل: $\text{أ} \times \text{ب} + \text{أ} \times \bar{\text{ب}} = \text{أ} \times (\text{ب} + \bar{\text{ب}})$ حسب i-6

$= \text{أ} \times 1$ حسب ii-8

$= \text{أ}$ حسب i-4

• مثال: أثبت أنه: $(\text{أ} \to \text{ب}) \times \bar{\text{ب}} = \overline{\text{أ}+\text{ب}}$

الحل: $(\text{أ} \to \text{ب}) \times \bar{\text{ب}} = (\bar{\text{أ}} + \text{ب}) \times \bar{\text{ب}}$ ملاحظة 5

$= \bar{\text{أ}} \times \bar{\text{ب}} + \text{ب} \times \bar{\text{ب}}$ حسب i-6

$= \bar{\text{أ}} \times \bar{\text{ب}} + 0$ حسب i-8

$= \bar{\text{أ}} \times \bar{\text{ب}}$ حسب ii-4

$= \overline{\text{أ}+\text{ب}}$ حسب ii-9

• مثال: أثبت أنه: $(\text{أ}+\text{ب}) \times \bar{\text{أ}} \to \text{ب} = 1$

الحل: $(\text{أ}+\text{ب}) \times \bar{\text{أ}} \to \text{ب} = \overline{(\text{أ}+\text{ب}) \times \bar{\text{أ}}} + \text{ب}$ ملاحظة 5

$= (\overline{\text{أ}+\text{ب}} + \bar{\bar{\text{أ}}}) + \text{ب}$ حسب i-9

$= (\bar{\text{أ}} \times \bar{\text{ب}} + \text{أ}) + \text{ب}$ حسب ii-9، 11ب

$= (\text{أ} + \bar{\text{أ}}) \times (\text{أ} + \bar{\text{ب}}) + \text{ب}$ حسب ii-6

$= 1 \times (أ + \bar{ب}) + ب$ حسب ii-8

$= (أ + \bar{ب}) + ب$ حسب i-4

$= أ + (ب + \bar{ب})$ حسب ii-3

$= أ + 1$ حسب ii-8

$= 1$ حسب ii-5.

• ضع التعبير البولي $أ ب جـ + \bar{أ} ب جـ + \bar{أ} \bar{ب} جـ$ في أبسط صورة.

الحل: $أ ب جـ + \bar{أ} ب جـ + \bar{أ} \bar{ب} جـ =$

$= [أ ب + \bar{أ} ب + \bar{أ} \bar{ب}] جـ$ حسب i-6

$= [\bar{أ} \bar{ب} + ب (\bar{أ} + أ)] جـ$ حسب i-6

$= [\bar{أ} \bar{ب} + ب \times 1] جـ$ حسب ii-8

$= [\bar{أ} \bar{ب} + ب] جـ$ حسب i-4

$= [(\bar{ب} + ب) \times (\bar{أ} + ب)] جـ$ حسب ii-7

$= [1 \times (\bar{أ} + ب)] جـ$ حسب ii-8

$= (\bar{أ} + ب) جـ$ حسب i-4

تمارين [2:5]

- أثبت صحة كل مما يأتي مع ذكر رقم القاعدة المستخدمة في البرهان:

1. $\text{أ} \times (\text{أ} + \text{ب}) = \text{أ}$
2. $\text{أ} + (\text{أ} \times \text{ب}) = \text{أ}$
3. $(\text{أ} \times \text{ب}) + \bar{\text{أ}} = \bar{\text{أ}} + \text{ب}$
4. $\text{أ} \times \overline{\text{أ} \times \bar{\text{ب}}} = \text{أ} \times \text{ب}$
5. $\text{أ} \times (\bar{\text{أ}} + \text{ب}) = \text{أ} \times \text{ب}$
6. $\text{أ} \times (\bar{\text{أ}} \times \text{ب}) = 0$
7. $\text{أ} + \overline{(\text{أ} \times \text{ب})} = 1$
8. $\overline{\text{أ}\,\bar{\text{ب}}} = \bar{\text{أ}} + \text{ب}$
9. $(\text{أ} \times \text{ب}) \times \overline{(\text{أ} + \text{ب})} = 0$
10. $\overline{\text{أ}\,(\bar{\text{أ}} + \text{ب})} + \text{ب} = 1$
11. $\overline{(\text{أ} \rightarrow \text{ب})} = \text{أ}\,\bar{\text{ب}} + \bar{\text{أ}}\,\text{ب}$
12. $(\bar{\text{أ}} + \text{ب})(\bar{\text{ب}} + \text{حـ}) = \bar{\text{أ}} + \text{حـ}$
13. $(\text{أ} + \text{ب}) + (\text{أ} + \text{حـ}) = (\text{أ} + \text{ب}) + \text{حـ}$
14. $(\bar{\text{أ}} + \text{حـ})(\bar{\text{ب}} + \text{حـ}) = \overline{\text{أ} + \text{ب}} + \text{حـ}$

- ضع في أبسط صورة كل مما يأتي:

15. $(\bar{\text{أ}} \times \text{ب}) + (\text{أ} \times \text{ب})$
16. $(\text{أ} + \text{ب})(\text{ب}\,\text{حـ} + \text{ب}\,\bar{\text{حـ}})$
17. $\overline{\text{أ}\,\text{ب}\,\text{حـ}} + \text{أ}\,\overline{\text{ب}\,\text{حـ}} + \text{أ}\,\text{ب}\,\bar{\text{حـ}}$
18. $\text{أ} \times (\text{أ} \rightarrow \text{ب}) \times (\text{ب} \rightarrow \text{حـ})$

أ ب حـ

[3:5] المنطق والكمبيوتر

البوابات المنطقية Logic Gates

فى هذا البند سنتقدم دراسة مبسطة عن نوع معين من الدوائر الثنائية والتى تسمى البوابات المنطقية .

وقبل أن نتناول هذه البوابات بالدراسة نود أن نشير بإيجاز إلى مكونات الحاسب الآلى لكى يتسنى لنا معرفة مدى أهمية هذه البوابات المنطقية بالنسبة للحاسب .

● الحاسب الالكترونى

يتألف الحاسب الالكترونى من عدة وحدات تتصل فيما بينها وتعمل بطريقة مترابطة عند تنفيذ مراحل تشغيل البيانات بشكل آلى .

وبالرغم من اختلاف هذه الوحدات من طراز لآخر حسب نوع الحاسب الا أنه يمكن القول أنها تتكون بصفة عامة من خمس وحدات رئيسية هى :

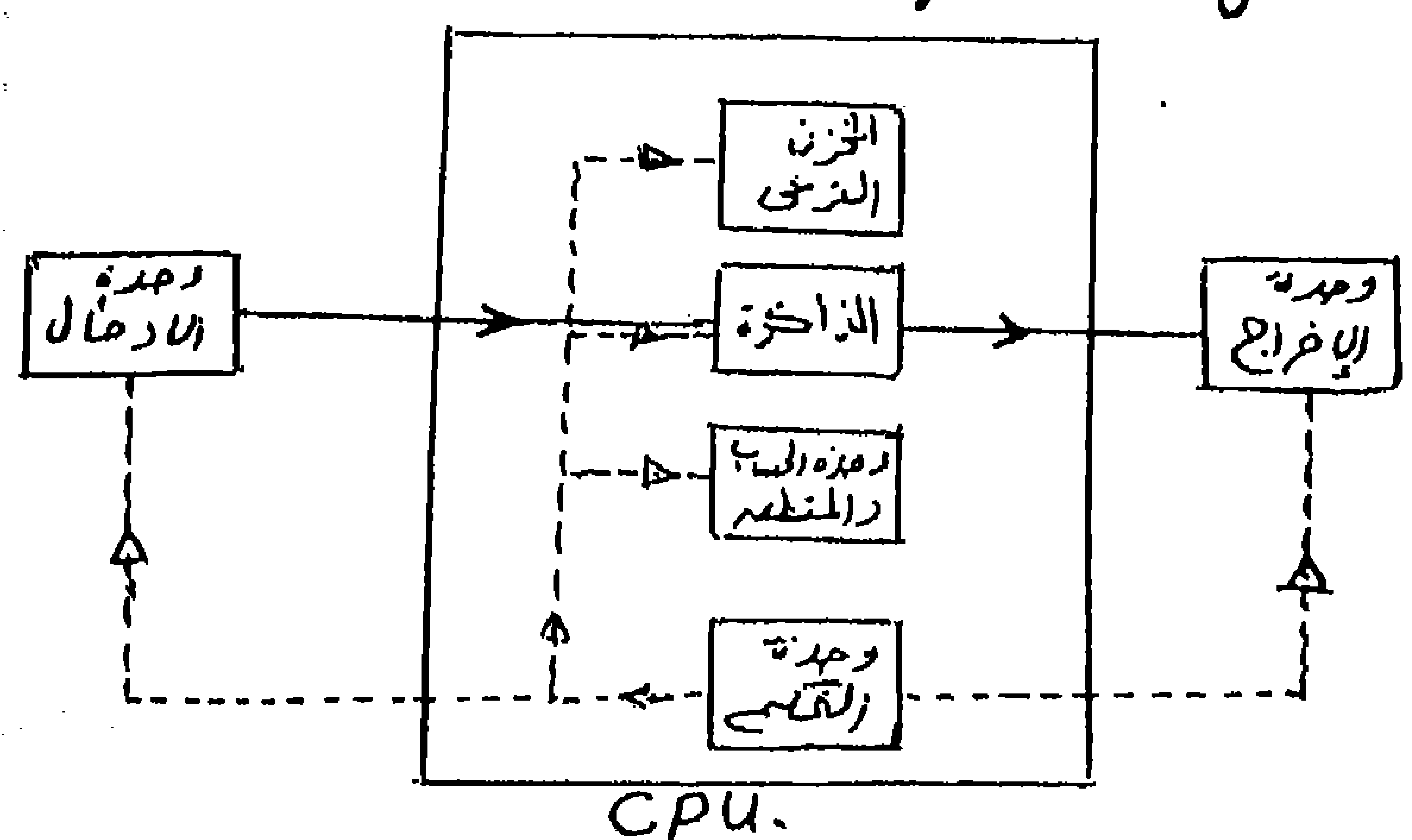
1. وحدة الإدخال Imput unit (وحدة تلقى البيانات)
2. الذاكرة Memory (وحدة التخزين الداخلى)
3. وحدة الحساب والمنطق Arithmatical logical unit
4. وحدة التحكم Control unit
5. وحدة الإخراج Output unit

● ويمكن إعادة تبويب هذه الوحدات وفقاً لطبيعتها فنقول أن الحاسب يتكون من :

1. وحدة الإدخال/الإخراج impot/outpot

وهى تضم وحدة تلقى البيانات مع وحدة استخراج المعلومات .

2. وحدة التشغيل المركزية (CPU)
Central Processing Unit - وهي تضم باقي الوحدات.



- وتعتبر وحدة الحساب والمنطق من الوحدات الأساسية والهامة في الحاسب، فهي تقوم بالعمليات التالية:

أ. العمليات الحسابية.

ب. العمليات المنطقية.

هـ. عمليات النقل والإزاحة.

- وتتكون وحدة الحساب والمنطق غالبا من الأجزاء التالية:

(i) الجامع (Adder) ويتم فيه عملية الجمع

(ii) المسجلات (Registers) وفيها تتم عملية إستقبال البيانات الواردة من الذاكرة أو إرسال البيانات إلى الذاكرة أو التخزين المرحلي للنتائج.

(iii) البوابات المنطقية (Logic gates) وهي دوائر الكترونية تقوم بالعمليات المنطقية.

- وهناك ثلاث بوابات منطقية أساسية هي:

- بوابة "و" AND gate
- بوابة "أو" OR gate
- بوابة النفي "ـــ" NOT gate

ومن هذه البوابات الأساسية يمكننا الحصول على بوابات منطقية أخرى وهي:
- بوابة "نفي و" NAND gate
- بوابة "نفي أو" NOR gate
- بوابة "أو المنفردة" Exclusive OR g.
- بوابة "نفي أو المنفردة" Exclusive NOR g.

- وفيما يلي نعرض لهذه البوابات من الناحية الرياضية والمنطقية:

[1:3:5] بوابة "و" AND gate :

ويرمز لها منطقيا بالرمز: (الخرج المدخلات)

وتكون عدة مدخلات (اثنين على الأقل) ومخرج واحد.

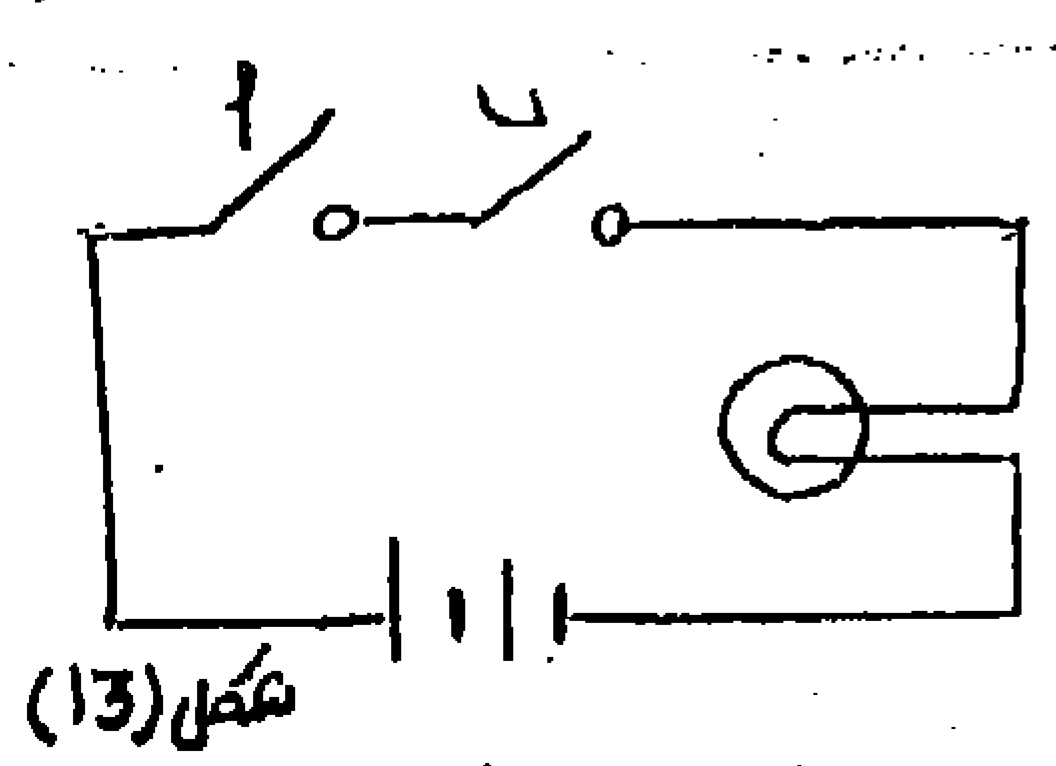
ويبين الشكل المقابل الرمز المنطقي لبوابة "و" ذات المدخلين أ، ب والخرج ص حيث أ، ب كميات منطقية تأخذ القيم 1 أو 0

- والتعبير البولي لهذه البوابة هو: أ × ب = ص

وتقرأ كالتالي: أ "و" ب تساوي الخرج ص

ويجب ملاحظة أن × لا تعني الضرب كما هو الحال في الجبر العادي.

- والجدول التالي يبين الخرج لبوابة "و" AND ذات المدخلين أ، ب



شكل (13)

المدخلات أ	المدخلات ب	الخرج ص
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ونلاحظ أن قيمة الخرج ص = 1 فقط عندما أ = ب = 1

وهذا يتفق تماما مع خرج الدائرة الكهربية الموضحة شكل (13)
وتتفق أيضا مع قيمة الصدق للتقرير أ ∧ ب .

- وتمثل بوابة "و" ومنه خواص الجبر البولي التالية :

أ × 0 = 0 ، أ × 1 = أ

أ × أ = أ ، أ × أ̄ = 0

• مثال : ارسم الشكل التخطيطي للمنطق لبوابة "و" ذات المداخل الثلاثة أ ، ب ، جـ وعبر عنها بوليا ثم ارسم الدائرة الكهربية المناظرة
- أوجد قيمة الخرج لهذه الدائرة عندما أ = 1 ، ب = 0 ، جـ = 1
- متى يكون خرج هذه الدائرة = 1 ؟

الحل :

أ ، ب ، جـ ← ص

الرمز المنطقي لبوابة "و" ذات المداخل الثلاثة

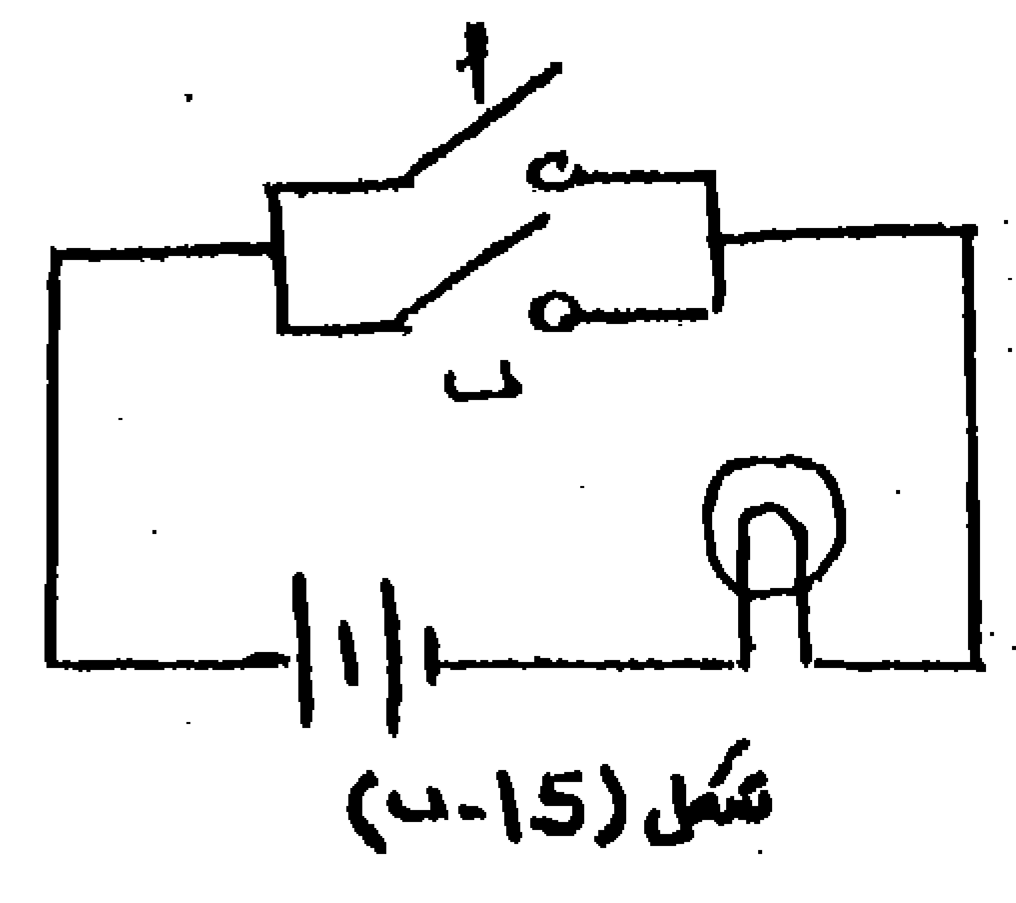
أ ، ب ، جـ

شكل (14)
الدائرة الكهربية المناظرة

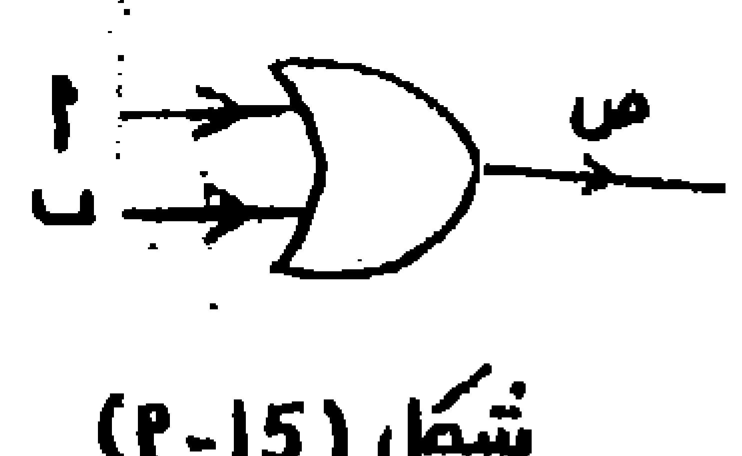
- التعبير البولي هو : أ × ب × جـ = ص أي أ ب جـ = ص
- عندما أ = 1 ، ب = 0 ، جـ = 1 فإن
قيمة الخرج = 1 × 0 × 1 = 0
- قيمة الخرج = 1 فقط عندما أ = ب = جـ = 1 .

[2:3:5] بوابة "أو" OR gate :

ويرمز لها منطقيا بالرمز (الخرج ← (للمدخلات)
ويكون لها مدخلين على الأقل ، وخرج واحد.
ويبين شكل (15-أ) الرمز المنطقي لبوابة "أو" ذات المدخلين أ ، ب
كما يبين شكل (15-ب) الدائرة الكهربية المناظرة لبوابة "أو" ذات المدخلين.



شكل (15-ب)



شكل (15-أ)

- والتعبير البولى لهذه البوابة أ + ب = ص
ويقرأ " أ " أو " ب " تساوى الخرج ص
ويلاحظ أنه + لا تعنى عملية الجمع كما هو الحال فى الجبر العادى .

- والجدول المقابل يبين قيمة الخرج لبوابة "أو" ذات المدخلين
وفى هذا الجدول نلاحظ أنه :
قيمة الخرج = 0 فقط عندما أ = ب = 0
وهذا يتفق مع قيمة الخرج للدائرة الكهربية المناظرة - شكل (15-ب) ويتفق أيضاً مع جدول الصدق للتقرير أ ∨ ب .

المدخلات أ	المدخلات ب	الخرج ص
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

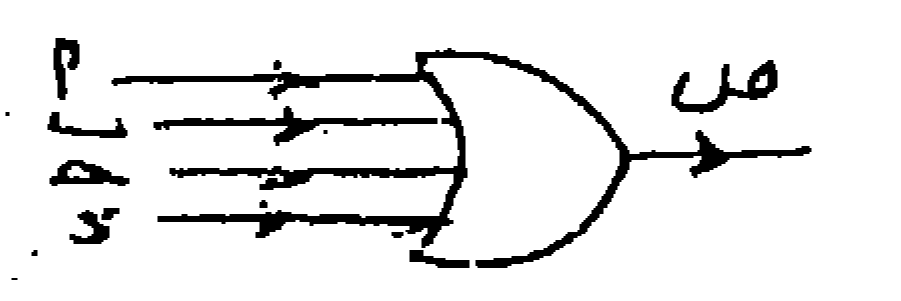
- وتمثل بوابة " أو " ومنه قوانين الجبر البولى التالية :

أ + 0 = أ ، أ + 1 = أ

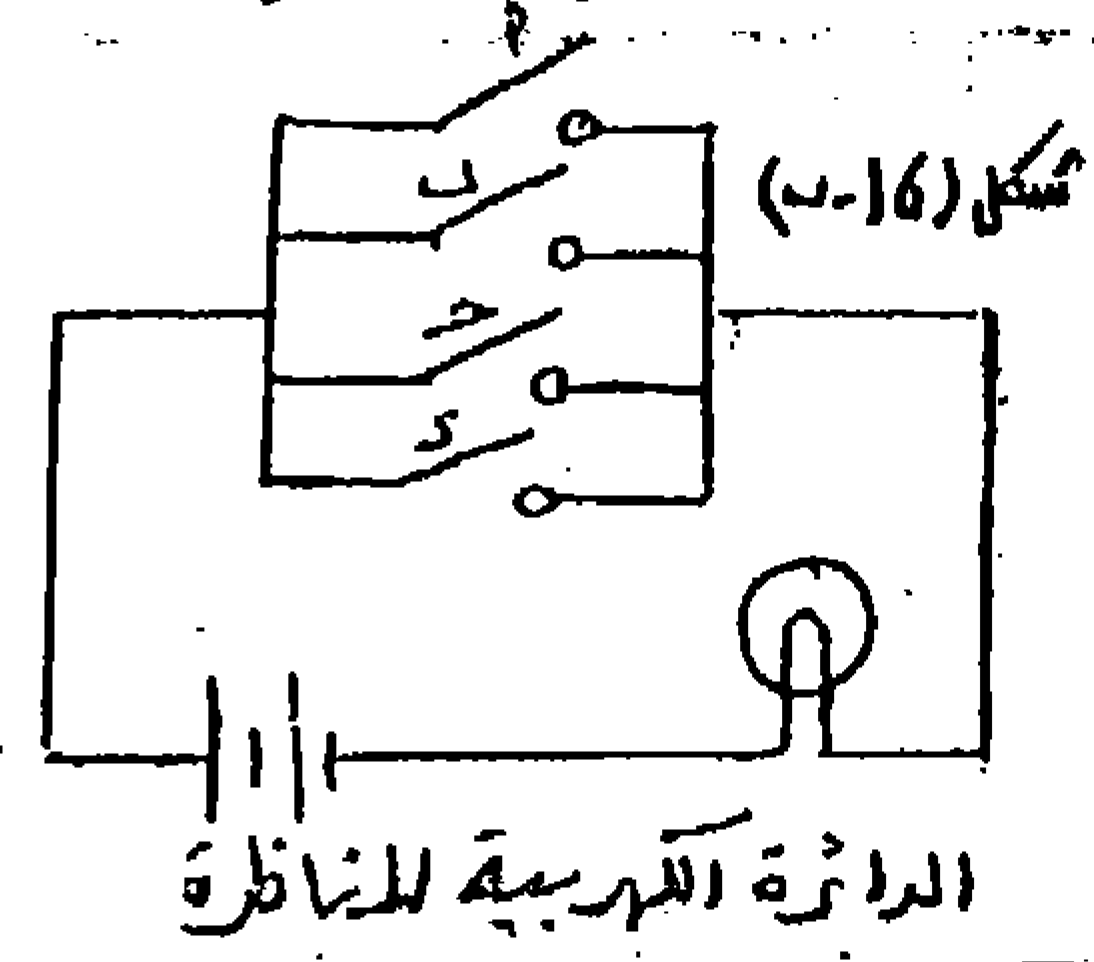
أ + أ = أ ، أ + $\bar{\text{أ}}$ = 1

• مثال : إرسم الرمز المنطقى والدائرة الكهربية المناظرة لبوابة "أو" ذات المداخل الأربعة أ، ب، حـ، د - واكتب التعبير البولى لها .

الحل :



الرمز المنطقى لبوابة " أو " ذات المداخل الأربعة شكل (16-أ)



شكل (16-ب)
الدائرة الكهربية المناظرة

- التعبير البولى : أ + ب + حـ + د = ص

• مثال : اكتب جدول الخرج لبوابة "أو" ذات المدخلات الثلاثة أ، ب، حـ ومنه استنتج متتابعة الخرج إذا كانت أ، ب، حـ لها المتتابعات التالية من الوحدات الأساسية

أ = (1 ، 1 ، 0 ، 0 ، 1 ، 1 ، 1)

ب = (0 ، 1 ، 1 ، 0 ، 0 ، 1 ، 0)

حـ = (1 ، 0 ، 1 ، 0 ، 0 ، 1 ، 1)

الحل :

المدخلات			الخرج
أ	ب	حـ	ص
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

ومن الجدول نلاحظ أنه :

قيمة الخرج = 0 فقط عندما أ = ب = حـ = 0

وفيما عدا ذلك تكون قيمة الخرج = 1

وبناء على ذلك تكون متتابعة الخرج المناظرة للمتتابعات الثلاث الداخلة :

أ = (1 ، 1 ، 0 ، 0 ، 1 ، 1 ، 1)

ب = (0 ، 1 ، 1 ، 0 ، 0 ، 1 ، 0)

حـ = (1 ، 0 ، 1 ، 0 ، 0 ، 1 ، 1)

↓

ص = (1 ، 1 ، 1 ، 0 ، 1 ، 1 ، 1)

[3:3:5] بوابة النفي (العاكس) NOT gate

تسمى بوابة النفي أيضا « العاكس » Inverter.

ويرمز لبوابة النفي (العاكس) منطقيا بالرمز

الدخل أ ← ▷ ← الخرج ص

ولهذه البوابة مدخل واحد ومخرج واحد

والتعبير البولي لبوابة النفي هو $\bar{أ}$ = ص

ويقرأ « نفي أ يساوي الخرج ص »

وقيمة الخرج ص هي عكس (متممة) الدخل أ.

فإذا كانت أ = 1 فإن قيمة الخرج ص = 0

وإذا كانت أ = 0 فإن قيمة الخرج ص = 1

وعلى ذلك إذا أخذت أ المتتابعة (1، 0، 0، 1، 1)

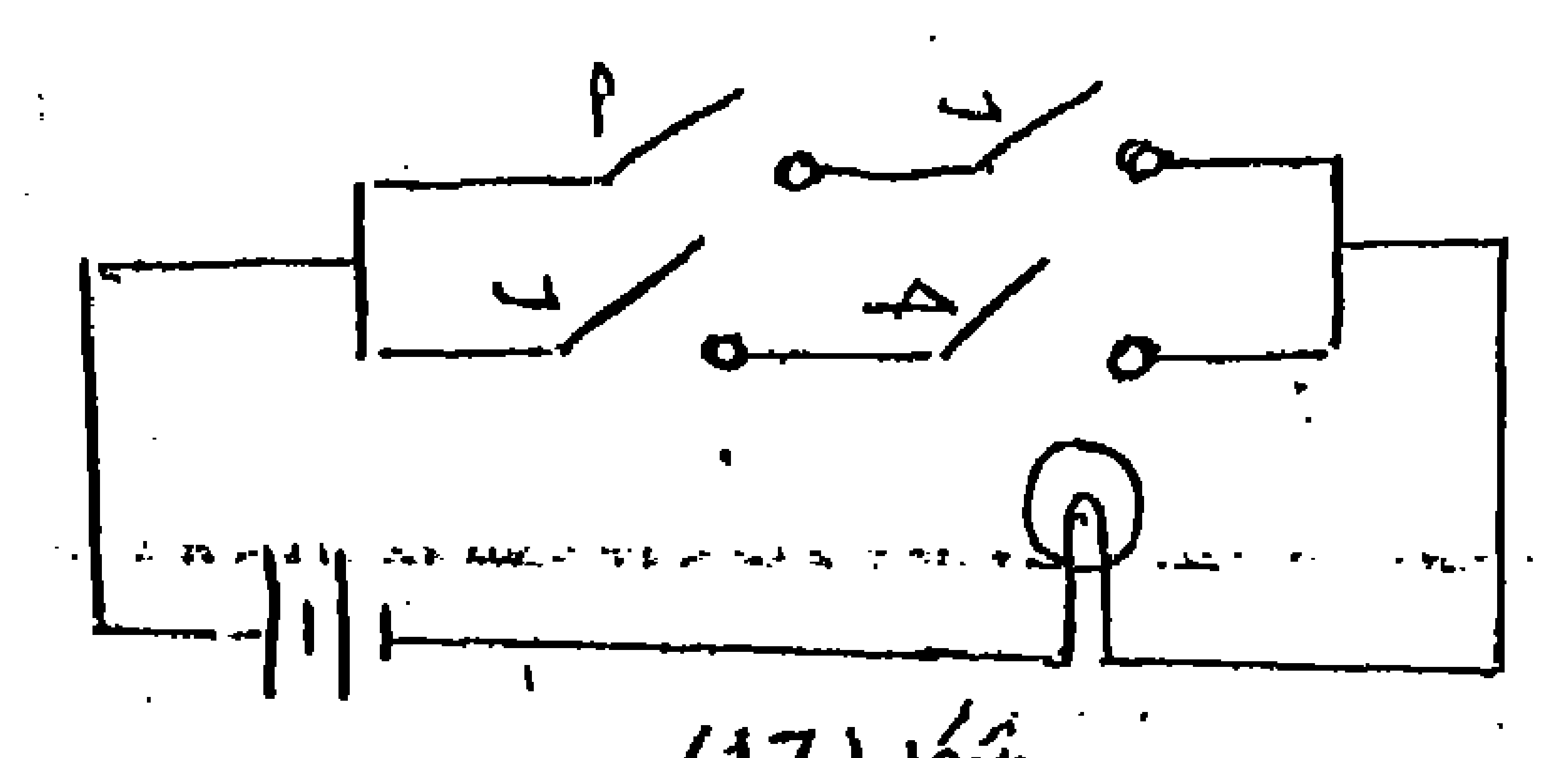
فإن الخرج ص يأخذ المتتابعة (0، 1، 1، 0، 0).

وتعمل بوابة النفي وفق قوانين الجبر البولي التالية :

$\bar{1} = 0$ ، $\bar{0} = 1$ ، $\bar{\bar{أ}} = أ$

أ = 1 ⇐ $\bar{أ}$ = 0 ، أ = 0 ⇐ $\bar{أ}$ = 1

• مثال : لدائرة المفاتيح الكهربية المبينة في الشكل التالي :



شكل (17)

(i) ارسم الشكل التخطيطي المنطقي المناظر لهذه الدائرة

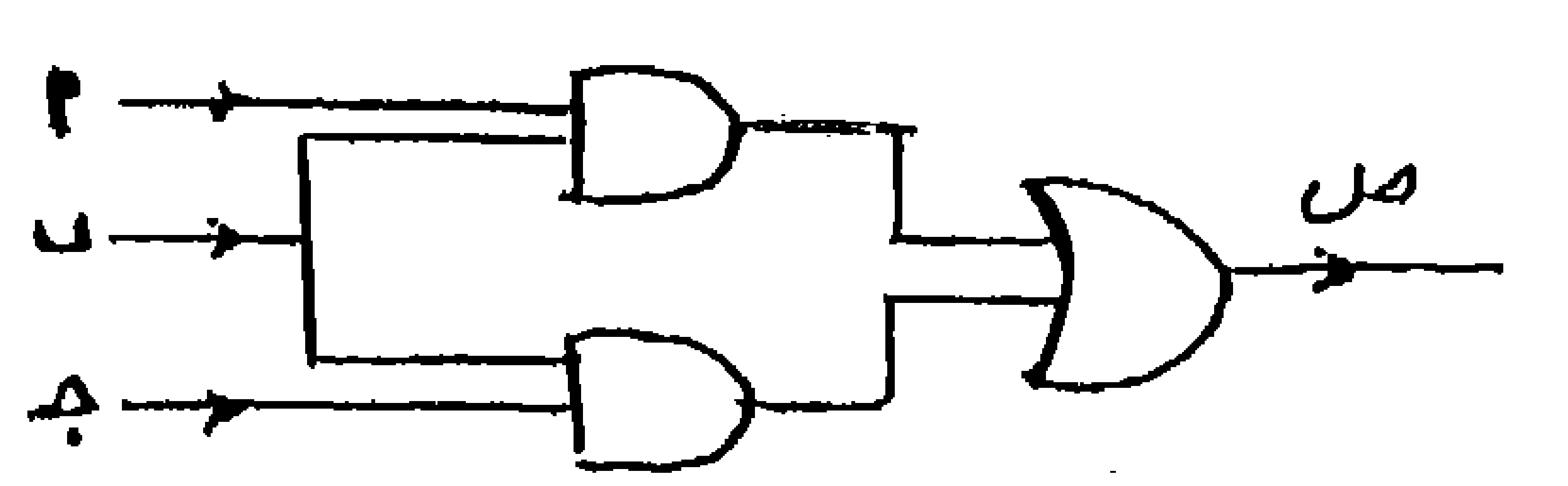
(ii) اكتب التعبير البولي المناظر لهذه الدائرة

(iii) اكتب جدول الصدق المناظر لهذه الدائرة.

(iv) استخدم قوانين الجبر البولي في تبسيط كل من دائرة

المفاتيح الكهربية المعطاة والدائرة المنطقية المناظرة .

الحل : (أ)



(ii) التعبير البولى المناظر هو :

أ ب + ب جـ = ص

(iii) جدول الصدق :

الناتج ص	ب جـ	أ ب	جـ	ب	أ
			المدخلات		
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0

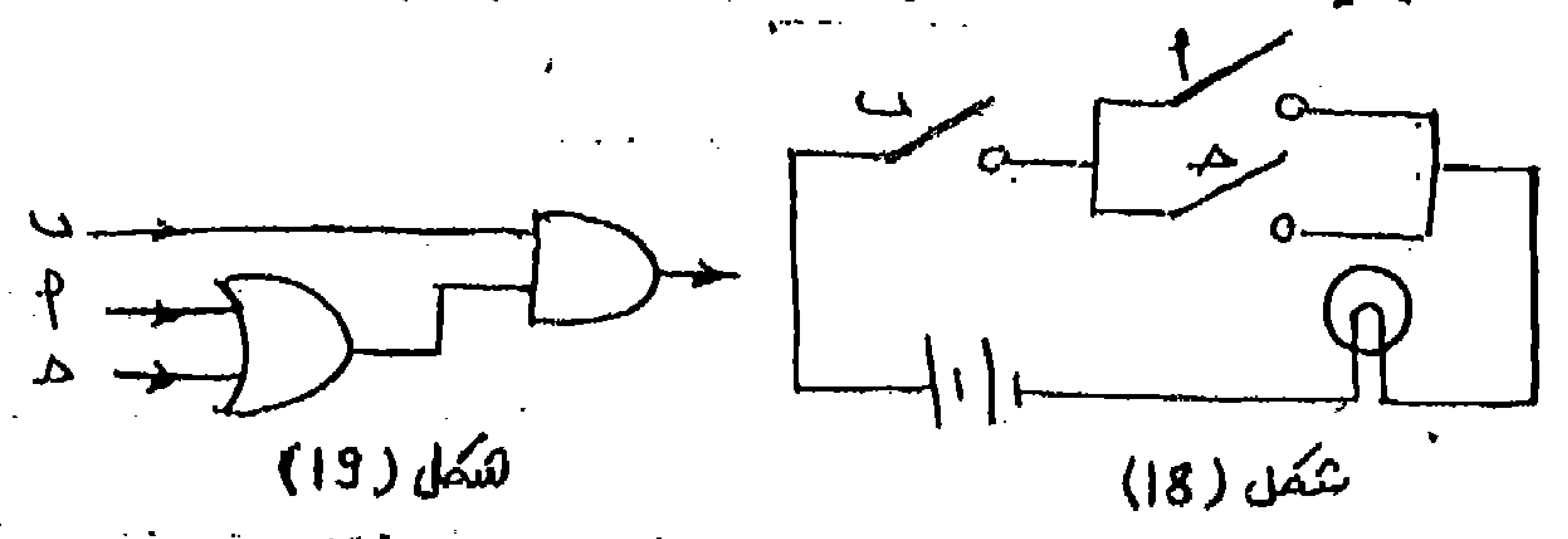
(iii) من قوانين الجبر البولى نجد أن :

أ ب + ب جـ = ب (أ + جـ)

وعلى ذلك يمكن تبسيط دائرة المفاتيح الكهربية السابقة

كما فى الشكل (18)

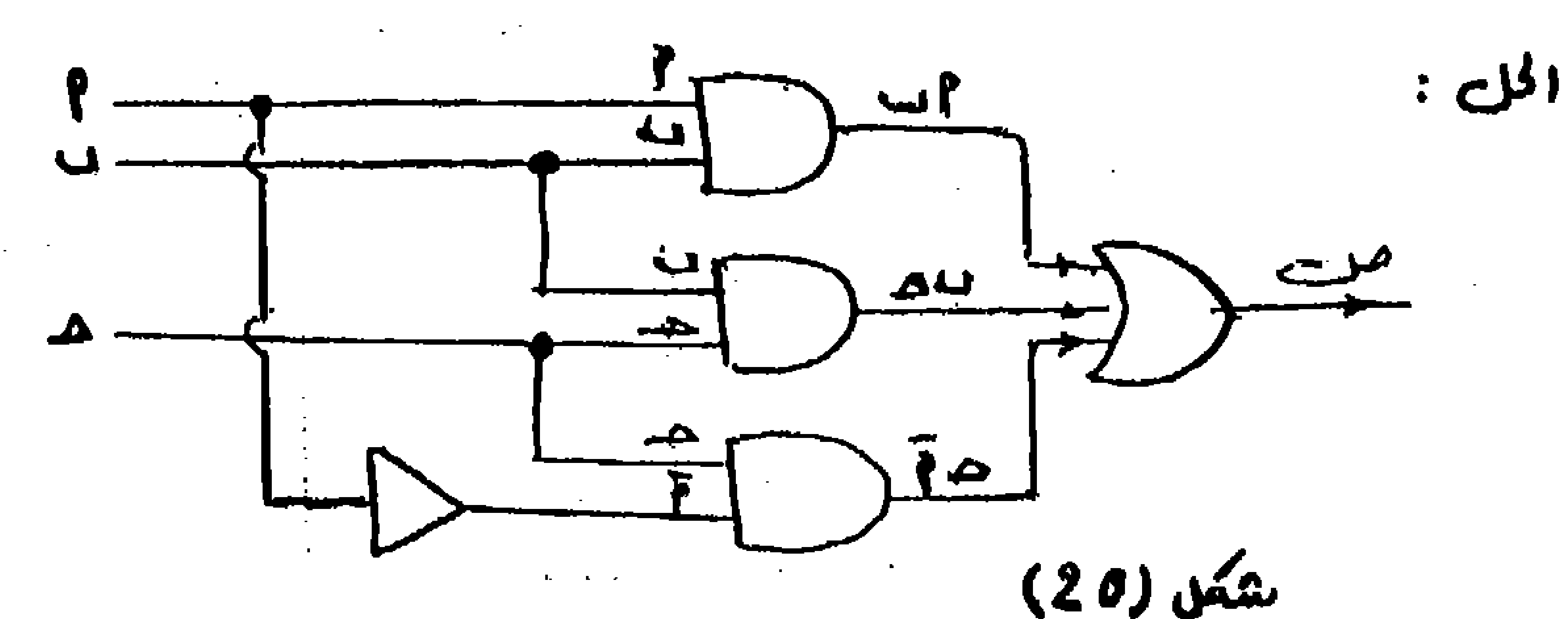
وتبسيط الدائرة المنطقية كما فى الشكل (19)



شكل (19) شكل (18)

• مثال: ارسم الشكل التخطيطي المنطقي المناظر للتعبير البولي:
أب + ب ح + ح أ̄ = ص ثم اكتب جدول الصدق الذي يبين قيمة الخرج عندما أ = 0

الحل:



شكل (20)

• عندما أ = 0 تكون عدد امكانيات جدول الصدق = 1 × 2 × 2 = 4

المدخلات أ	ب	ح	أب	ب ح	ح أ̄	الخرج ص
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0

• مثال: استخدم قوانين الجبر البولي في تبسيط التعبير البولي:
أب + ب ح + ح أ̄ ثم ارسم الشكل التخطيطي المنطقي للتعبير الناتج.

الحل: أب + ب ح + ح أ̄ = أب + ب ح + ح أ̄ + أ أ̄

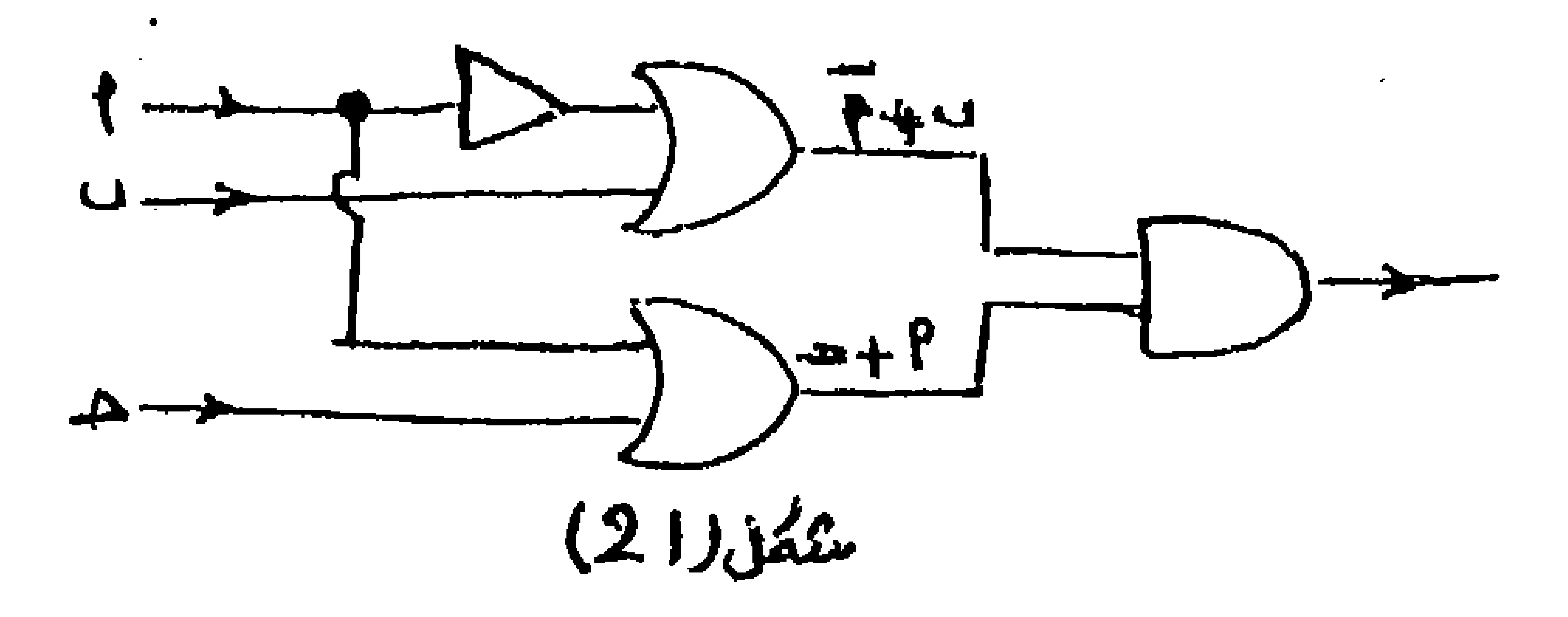
= (أب + ب ح) + (ح أ̄ + أ أ̄)

= ب (أ + ح) + أ̄ (ح + أ)

= ب (أ + ح) + أ̄ (أ + ح)

= (ب + أ̄) (أ + ح)

والشكل المنطقي المناظر لهذا التعبير هو:



شكل (21)

حل آخر :

$$= \bar{\text{أ}}\,\text{حـ} + \text{حـ}\,\text{ب} + \text{ب}\,\text{أ}$$

$$= \bar{\text{أ}}\,\text{حـ} + (\bar{\text{أ}} + \text{أ}) \times \text{حـ}\,\text{ب} + \text{ب}\,\text{أ}$$

$$= \bar{\text{أ}}\,\text{حـ} + \bar{\text{أ}}\,\text{حـ}\,\text{ب} + \text{أ}\,\text{حـ}\,\text{ب} + \text{ب}\,\text{أ}$$

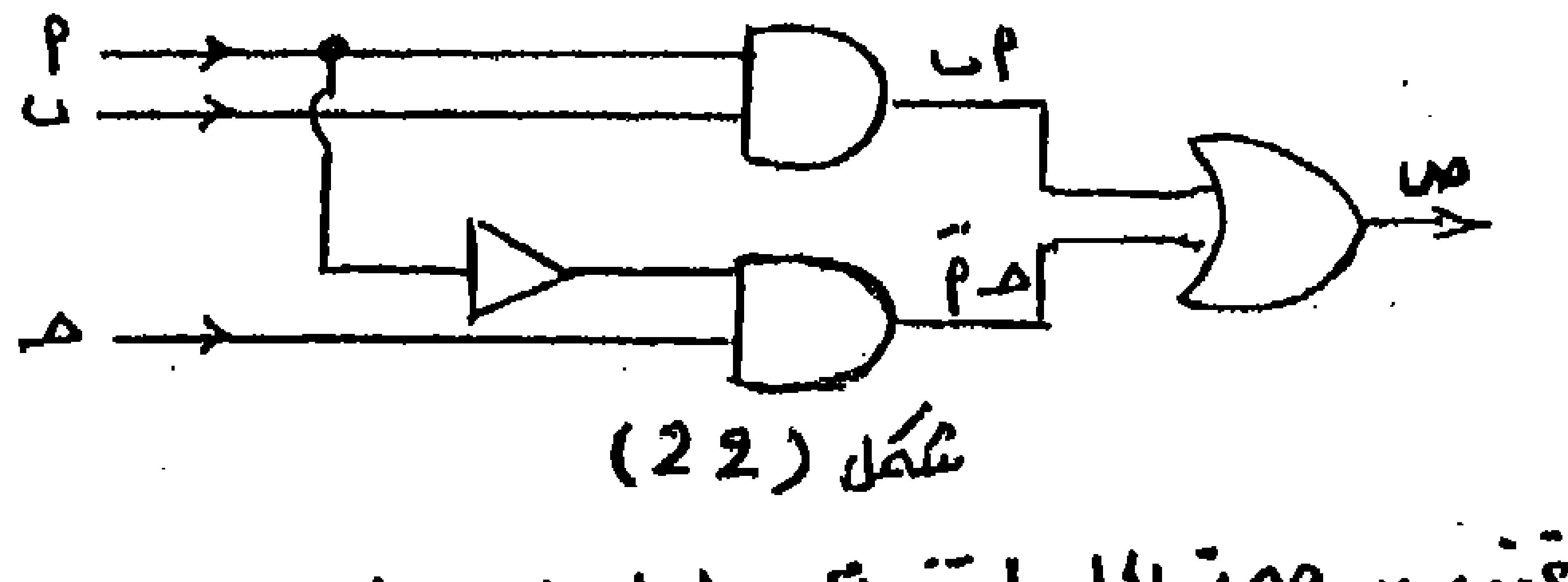
$$= (\bar{\text{أ}}\,\text{حـ} + \bar{\text{أ}}\,\text{حـ}\,\text{ب}) + (\text{أ}\,\text{حـ}\,\text{ب} + \text{ب}\,\text{أ})$$

$$= \bar{\text{أ}}\,\text{حـ}(1 + \text{ب}) + (\text{حـ} + 1)\,\text{ب}\,\text{أ}$$

$$= \bar{\text{أ}}\,\text{حـ} \times 1 + 1 \times \text{ب}\,\text{أ}$$

$$= \bar{\text{أ}}\,\text{حـ} + \text{ب}\,\text{أ}$$

والشكل المنطقي المناظر لهذا التعبير هو :



شكل (22)

(تحقق من صحة الحل باستخدام جداول الصدق).

[4:3:5] بوابة "نفي-و" NAND gate

وتتكون من بوابة "و" يتبعها "عاكس"

المدخلات ← الخرج

ويرمز لها منطقيا بالرمز   المدخلات ← الخرج .

ويبين الشكل (23)(أ-ب) الرمز المنطقي لبوابة "نفي-و" ذات المدخلين أ، ب.

أ، ب ← أب ← $\overline{\text{أب}}$

شكل (23-أ)

أ، ب ← $\overline{\text{أب}}$

شكل (23-ب)

والتعبير البولي لبوابة "نفي-و" ذات المدخلين أ، ب هو:

$$\overline{\text{أب}} = \text{ص}$$

وجدول الصدق لهذا التعبير كما هو

موضح في الجدول المقابل

ويلاحظ أنه:

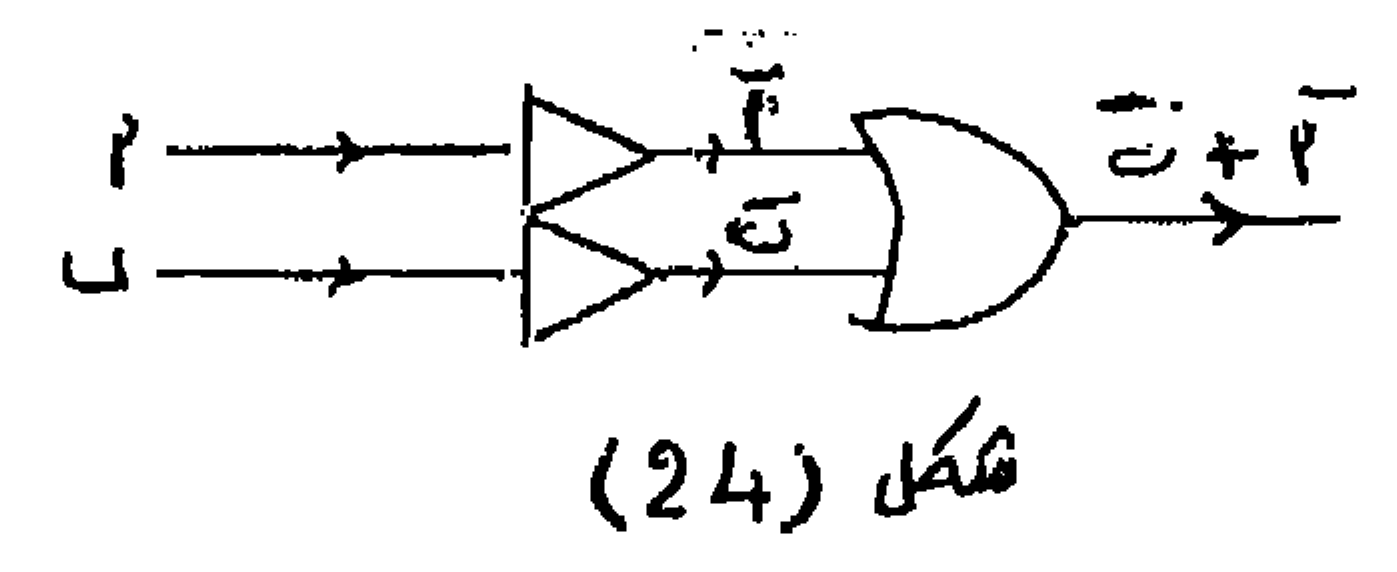
قيمة الخرج ص=0 فقط إذا كانت

قيمة كل من المدخلين أ، ب تساوي "1".

• ومن قانون دي مورجان ب 9-أ يمكننا تحويل بوابة "نفي-و"

إلى بوابة "أو" ذات المدخلات المعكوسة - والتي تكافئ في

وظيفتها عمل بوابة "نفي-و" كما في شكل (24)



شكل (24)

• مثال: اكتب التعبير البولي لبوابة "نفي - و" ذات المدخلات الأربعة أ، ب، جـ، د ثم اكتب متتابعة الخرج (ص) إذا كانت متتابعات (نبضات) أ، ب، جـ، د هي:

أ = (0، 1، 0، 1، 1، 0، 0، 0، 1، 0، 1)

ب = (1، 1، 0، 1، 0، 1، 0، 1، 1، 0، 0)

جـ = (0، 1، 0، 1، 0، 1، 0، 0، 1، 1، 1)

د = (1، 1، 0، 0، 1، 1، 0، 0، 1، 0، 1)

الحل: الرمز المنطقي هو:

أ، ب، جـ، د ← $\overline{\text{أ ب جـ د}}$

• التعبير البولي هو: ص = $\overline{\text{أ ب جـ د}}$

أ = 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0 1

ب = 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0

جـ = 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1

د = 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1

أ ب جـ د = 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0

$\overline{\text{أ ب جـ د}}$ = 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1

∴ متتابعة الخرج هي:

ص = $\overline{\text{أ ب جـ د}}$ = (1، 0، 1، 1، 1، 1، 1، 1، 0، 1، 1)

• لاحظ أن استنتاج متتابعة الخرج من جدول الصدق عملية شاقة حيث أن الجدول في هذه الحالة يحوي $2^4 = 16$ إمكانية

[5:3:5] بوابة "نفي-أو" NOR gate

وتتكون من بوابة "أو" يتبعها "عاكس"

المدخلات — الخرج

ويرمز لها منطقيا بالرمز:

المدخلات — الخرج

ويبين الشكل (25-أ، ب) الرمز المنطقي لبوابة "نفي-أو" ذات المدخلين أ، ب.

$\overline{أ+ب}$

شكل (25-ب) — شكل (25-أ)

والتعبير البولي لهذه البوابة $\overline{أ+ب} = ص$

وجدول الصدق المناظر لهذا التعبير

كما في الجدول المقابل

ومنه نلاحظ أنه

قيمة الخرج ص = 1 فقط

إذا كان أ = ب = 0

ومن قانون دي مورجان ب 9-أأ : $\overline{أ+ب} = \bar{أ} \times \bar{ب}$

ومن ثم يمكن تحويل بوابة "نفي-أو" إلى بوابة "و" ذات المدخلات المعكوسة - والتي تكافئ في وظيفتها عمل بوابة "نفي-أو" كما في شكل (26)

$\bar{أ}$ ، $\bar{ب}$ ، $\bar{أ}\cdot\bar{ب}$

شكل (26)

- مثال: إرسم الرمز المنطقي لبوابة "نفي-أو" ذات المداخل الثلاثة أ، ب، حـ وعبر عنها بوليا.

الحل: الرمز المنطقي نصوره:

أ ، ب ، حـ ، ص

والتعبير البولى المناظر هو :

$\overline{أ + ب + ح} = ص$ أو $\bar{أ}\ \bar{ب}\ \bar{ح} = ص$

• مثال : اكتب قيمة الخرج ص لبوابة "نفى - أو" المبينة فى الشكل التالى :

1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	←	أ
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	←	ب
1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	←	ح

شكل (27)

الحل : قيمة الخرج $ص = \overline{أ + ب + ح}$

$ص_1 = \overline{1 + 0 + 0} = \bar{1} = 0$ ، $ص_2 = \overline{0 + 0 + 0} = \bar{0} = 1$

$ص_3 = \overline{1 + 0 + 1} = \bar{1} = 0$ ، $ص_4 = \overline{1 + 1 + 1} = \bar{1} = 0$

$ص_5 = \overline{1 + 0 + 0} = \bar{1} = 0$ ، $ص_6 = \overline{0 + 1 + 0} = \bar{1} = 0$

$ص_7 = \overline{1 + 0 + 1} = \bar{1} = 0$ ، $ص_8 = \overline{0 + 0 + 0} = \bar{0} = 1$

$ص_9 = \overline{1 + 0 + 0} = \bar{1} = 0$ ، $ص_{10} = \overline{1 + 1 + 1} = \bar{1} = 0$

$ص_{11} = \overline{1 + 0 + 1} = \bar{1} = 0$

[6:3:5] بوابة "أو المنفردة" XOR gate

و يرمز لها منطقيا بالرمز : المدخلات ← الخرج

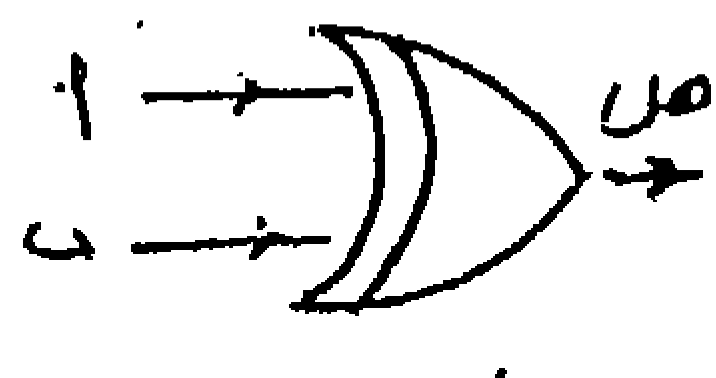
ولها مدخلين على الأقل ومخرج واحد

ويبين شكل (28) الرمز المنطقى لبوابة " أو المنفردة " " Exclus

ذات المدخلين أ ، ب .

ويبين الجدول المقابل جدول الصدق لهذه البوابة

أ	ب	ص = أ ⊕ ب
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0



شكل (28)

- والتعبير البولي البسيط لهذه البوابة هو:

$$أ \oplus ب = ص$$

ملاحظة: نعلم أن التقرير $أ \veebar ب$ يكون صوابا فقط إذا كان أحد التقريرين أ، ب صوابا فقط

معنى ذلك أنه: $أ \veebar ب = (أ \wedge \sim ب) \vee (ب \wedge \sim أ)$

ومن ثم يكون التعبير البولي المناظر هو:

$$أ \oplus ب = أ\,\bar{ب} + ب\,\bar{أ}$$

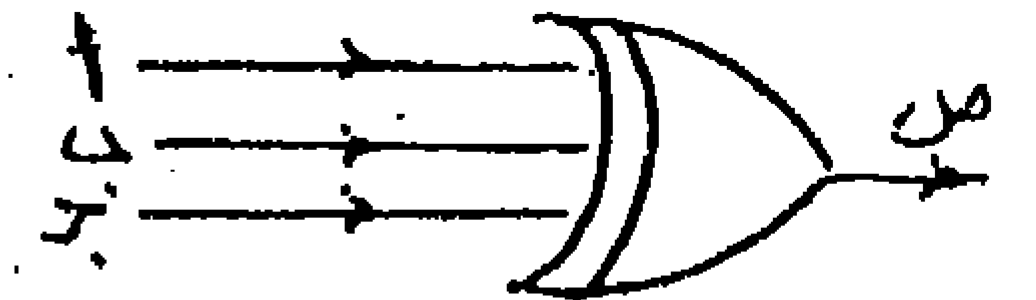
∴ يمكن التعبير بوليا عن بوابة "أو المنفردة" بطريقتين:

التعبير الأول: $أ \oplus ب = ص$

التعبير الثاني: $أ\,\bar{ب} + ب\,\bar{أ} = ص$.

- **مثال:** ارسم الشكل التخطيطي لبوابة "أو المنفردة" ذات المداخل الثلاث أ، ب، حـ ثم اكتب جدول الخرج المناظر - ماذا تلاحظ؟

الحل: - الرمز المنطقي هو:



- التعبير البولي المناظر: $أ \oplus ب \oplus حـ = ص$

أ	ب	حـ	أ ⊕ ب	⊕ حـ	= ص
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0

(المدخلات: أ، ب، حـ — الخرج: أ ⊕ ب ⊕ حـ = ص)

من الجدول نلاحظ أنه:

قيمة الخرج ص = 1 فقط عندما يكون عدد الأرقام الثنائية (1) في

المدخلات عدداً فردياً .
ومن أجل ذلك يمكن اعتبار بوابة "أو المنفردة" كشافاً لمعرفة العدد الفردي من الرقم الثنائي (1) في المدخلات المتزامنة .

[7:3:5] بوابة "نفي - أو المنفردة" XNOR gate

وتتكون من بوابة "أو المنفردة" يتبعها "عاكس"

المدخلات — الخرج

ويرمز له منطقياً بالرمز:

الخرج

ويبين شكل (29-أ، ب) الرمز المنطقي لبوابة "نفي - أو المنفردة" ذات المدخلين أ، ب .

أ، ب — $\overline{أ \oplus ب}$

شكل (29-ب) — شكل (29-أ)

والتعبير البولي لبوابة "نفي - أو المنفردة" ذات المدخلين أ، ب هو:

$$ص = \overline{أ \oplus ب}$$

ملاحظة: سبق أن أوضحنا أن:

$$\sim(أ \veebar ب) \equiv أ \longleftrightarrow ب$$

$$\equiv (\sim أ \vee ب) \wedge (\sim ب \vee أ)$$

إذن يمكننا التعبير بولياً عن $\overline{أ \oplus ب}$ بالصيغة:

$$\overline{أ \oplus ب} = (\bar{أ} + ب)(\bar{ب} + أ)$$

$$= \bar{أ}\bar{ب} + أ\bar{أ} + ب\bar{ب} + أب$$

$$= \bar{أ}\bar{ب} + 0 + 0 + أب$$

$$= \bar{أ}\bar{ب} + أب$$

وعلى ذلك يمكن التعبير عن بوابة "نفي - أو المنفردة" بولياً

بطريقتين :

التعبير الأول (البسيط) : $\overline{أ \oplus ب} = ص$

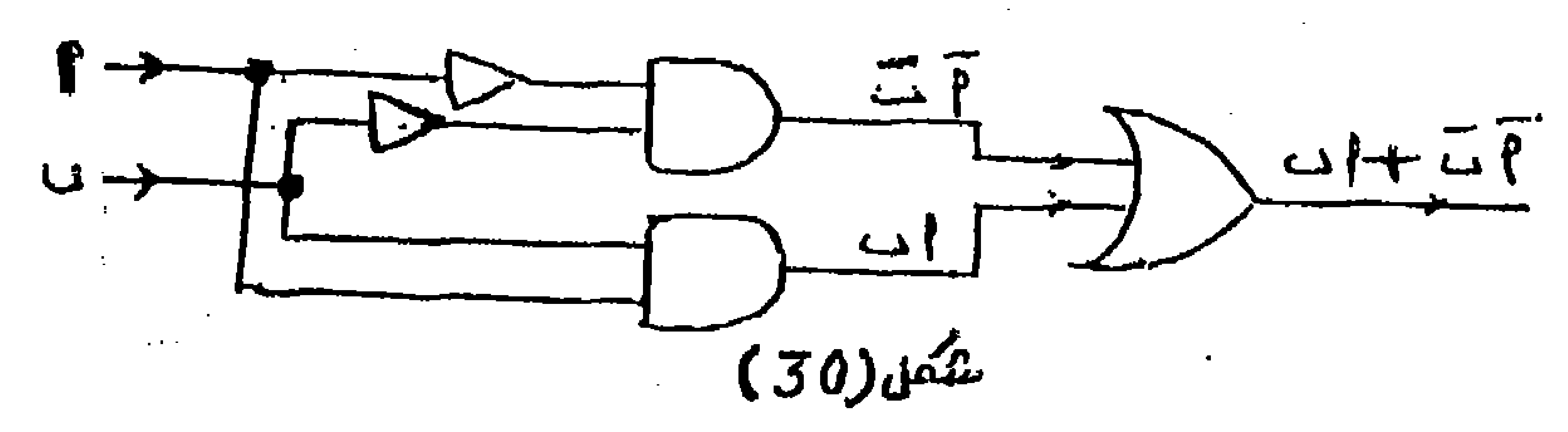
التعبير الثاني : $\bar{أ}\,\bar{ب} + أب = ص$

• مثال : استخدم بوابات "و" ، "أو" ، العواكس في رسم الشكل التخطيطي المنطقي لبوابة "نفي - أو المنفردة" ذات المدخلين أ ، ب .

الحل : من التعبير البولي لبوابة "نفي - أو المنفردة"

$\bar{أ}\,\bar{ب} + أب = ص$

يكون الشكل التخطيطي المناظر كما في شكل (30)



شكل (30)

• مثال : اكتب التعبير البولي البسيط لبوابة "نفي - أو المنفردة" ذات المدخلات أ ، ب ، جـ ثم اكتب متتابعة الخرج لهذه البوابة إذا أخذت أ ، ب ، جـ المتتابعات (النبضات) الآتية :

(1 ، 0 ، 0 ، 0 ، 1 ، 1) = أ

(1 ، 1 ، 0 ، 1 ، 0 ، 1) = ب

(1 ، 0 ، 1 ، 1 ، 1 ، 0) = جـ

ماذا تلاحظ ؟

أ ، ب ، جـ — الخرج (ص)

الحل : الرمز المنطقي :

والتعبير البولي : $\overline{أ \oplus ب \oplus جـ} = ص$

1 0 0 0 1 1 = أ

1 1 0 1 0 1 = ب

1 0 1 1 1 0 = جـ

1 1 1 0 0 0 = $أ \oplus ب \oplus جـ$

0 0 0 1 1 1 = $\overline{أ \oplus ب \oplus جـ}$

∴ متتابعة الخرج هي : ص = (1، 1، 1، 0، 0، 0، 0)

ملاحظات

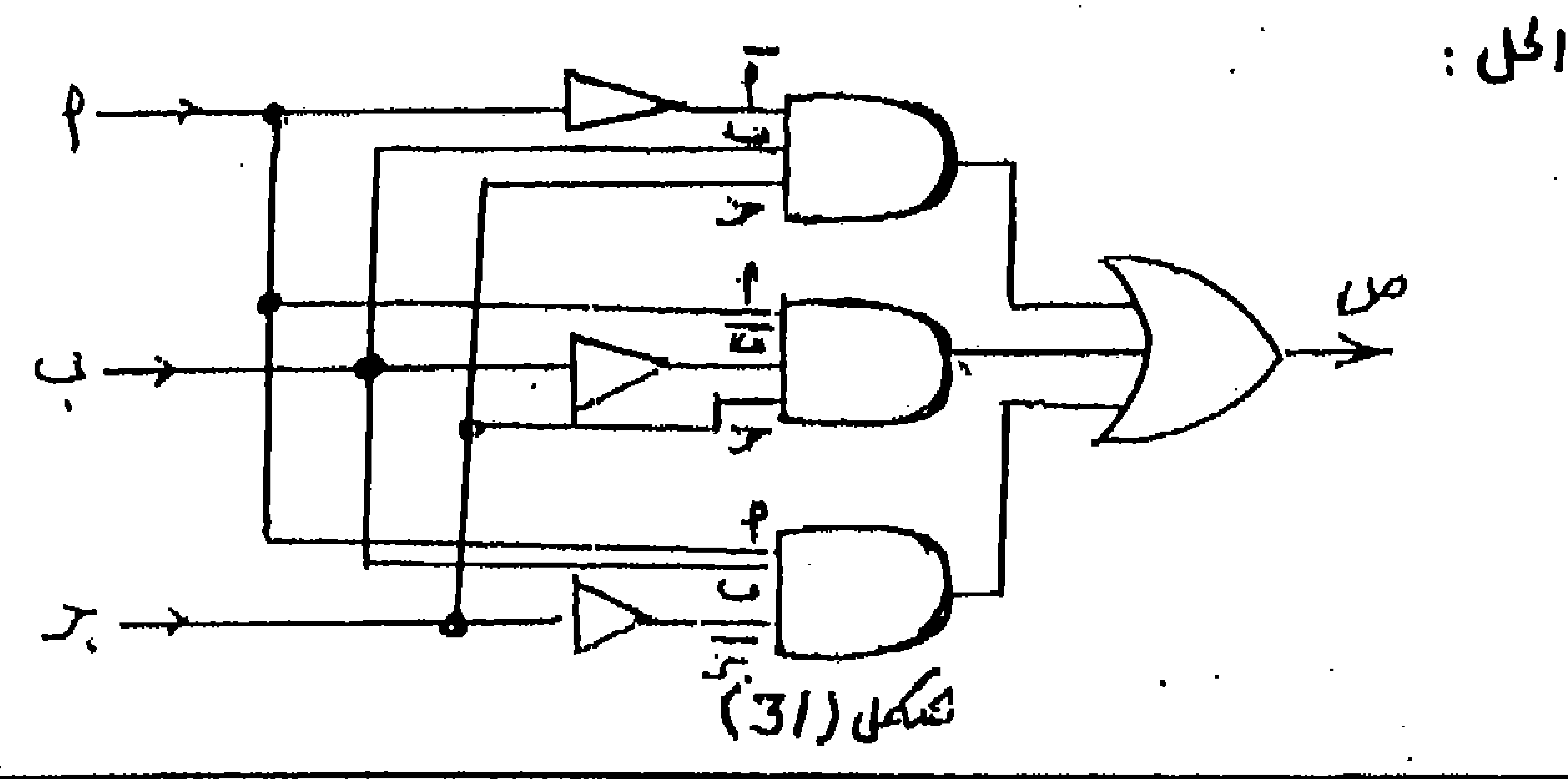
- سبق أن ذكرنا أنه:
قيمة الخرج لبوابة "أو- المنفردة" تساوي "1" عندما تتزامن في مدخلاتها عدد فردي من الرقم الثنائي "1" - لذا تعتبر هذه البوابة كشافا عن العدد الفردي من الرقم الثنائي "1"

- وفي هذا المثال نلاحظ أنه:
قيمة الخرج لبوابة "نفي - أو المنفردة" تساوي "1" عندما تتزامن في مدخلاتها عدد زوجي من الرقم الثنائي "1" - لذا تعتبر هذه البوابة كشافًا عن العدد الزوجي من الرقم الثنائي "1".

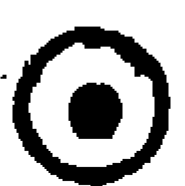
• مثال: ارسم الشكل التخطيطي المنطقي المناظر للتعبير البولي التالي:

$$\bar{أ}\ ب\ جـ + أ\ \bar{ب}\ جـ + أ\ ب\ \bar{جـ} = ص$$

الحل:



شكل (31)



وبعد هذا العرض الموجز لبعض التطبيقات العلمية للمنطق نستطيع القول أن المنطق لم يعد علما نظريا كما كان في الماضي بل أصبح علما تطبيقيا له من التطبيقات ما يجعلنا ننظر إليه كأسلوب لتهذيب طرق البحث والدراسة في مناحي العلم المختلفة ومن ثم كوحدة بناء رئيسية في تكنولوجيا العصر.

تمارين : [3:5]

1. إرسم الرمز المنطقي لبوابة " و AND" ذات المدخلين أ، ب وعبر عنها بوليا - أكتب متتابعة الخرج لهذه البوابة إذا أخذت مدخلاتها متتابعات النبضات كالتالي:

أ = 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0

ب = 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1

2. إرسم الرمز المنطقي لبوابة " و AND" ذات المدخلات الأربعة أ، ب، جـ، د وعبر عنها بوليًا.
إرسم الدائرة الكهربية المناظرة ثم بين قيمة الخرج لهذه الدائرة عندما تأخذ أ، ب، جـ، د النبضات 1، 0، 1، 0 على الترتيب
متى يكون خرج هذه الدائرة = 1 ؟

3. أعد نفس السؤال السابق مع بوابة " نفي - و NAND "

4. إرسم الرمز المنطقي لبوابة " أو OR " ذات المدخلات أ، ب، جـ وعبر عنها بوليا - ثم بين قيمة الخرج لهذه البوابة إذا تزامنت على مدخلاتها أ، ب، جـ النبضات التالية :

أ = (1، 1، 0، 0، 0)

ب = (0، 1، 0، 0، 0)

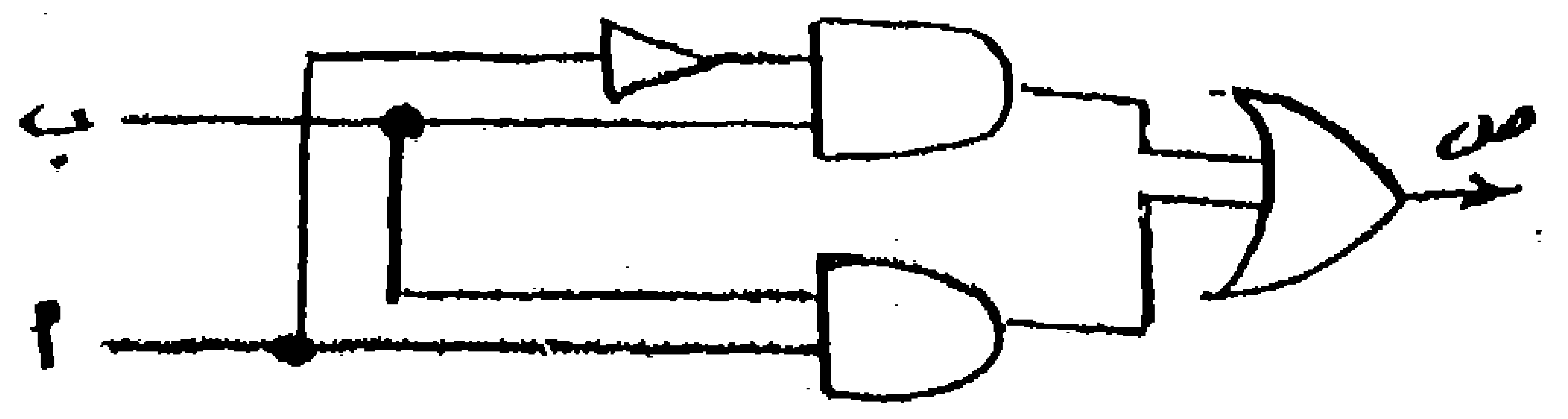
جـ = (1، 1، 1، 0، 1)

5. أكتب جدول الصدق لكل من " بوابة " أو OR "، "نفي-أو NOR" ذات المدخلات الثلاثة أ، ب، جـ.
متى يكون خرج كل من البوابتين = 0 ؟

6. إرسم الرمز المنطقي لبوابة "أو المنفردة XOR" ذات المدخلات أ، ب، جـ، د وعبر عنها بوليا. أكتب جدول الصدق المناظر لهذه البوابة.
متى يكون خرج هذه البوابة 1 ؟
ومتى يكون الخرج 0 ؟

هل تعتبر بوابة "أو المنفردة" كاشفا عن تزامن عدد زوجي من الأرقام الثنائية "0" في المدخلات ؟

7 . اكتب التعبير البولي المناظر للشكل المنطقي التالي:

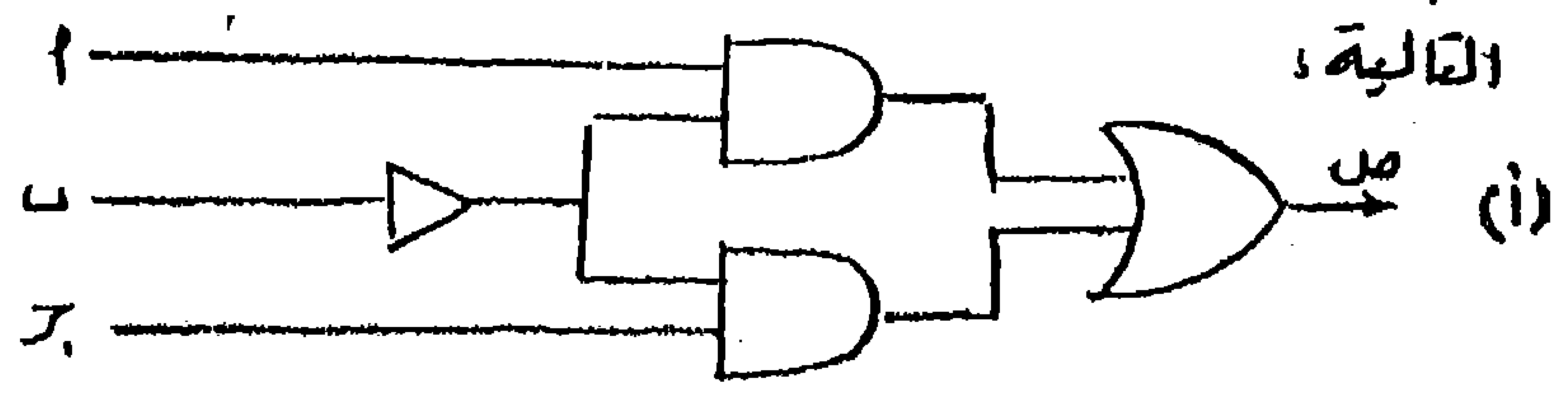


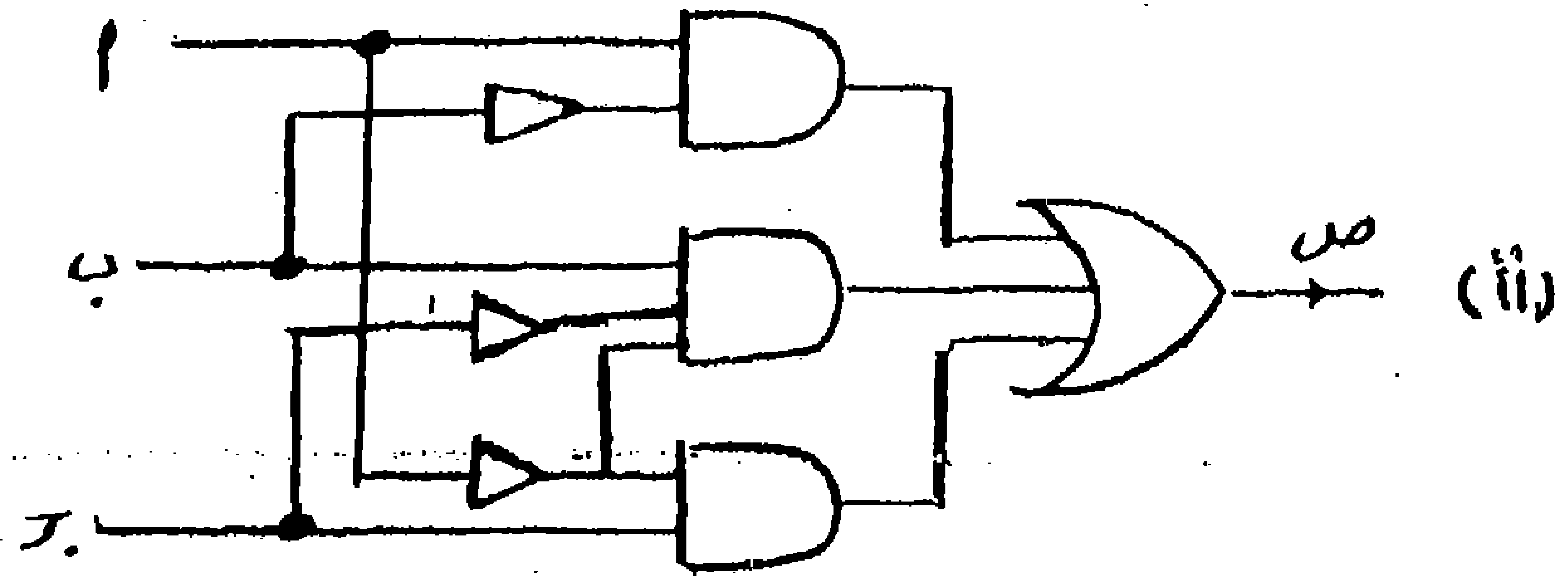
اكتب متتابعة الخرج من هذه الدائرة إذا كانت :

أ = 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0 1

ب = 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0

8 . اكتب التعبير البولي المناظر لكل من الأشكال التخطيطية المنطقية التالية :





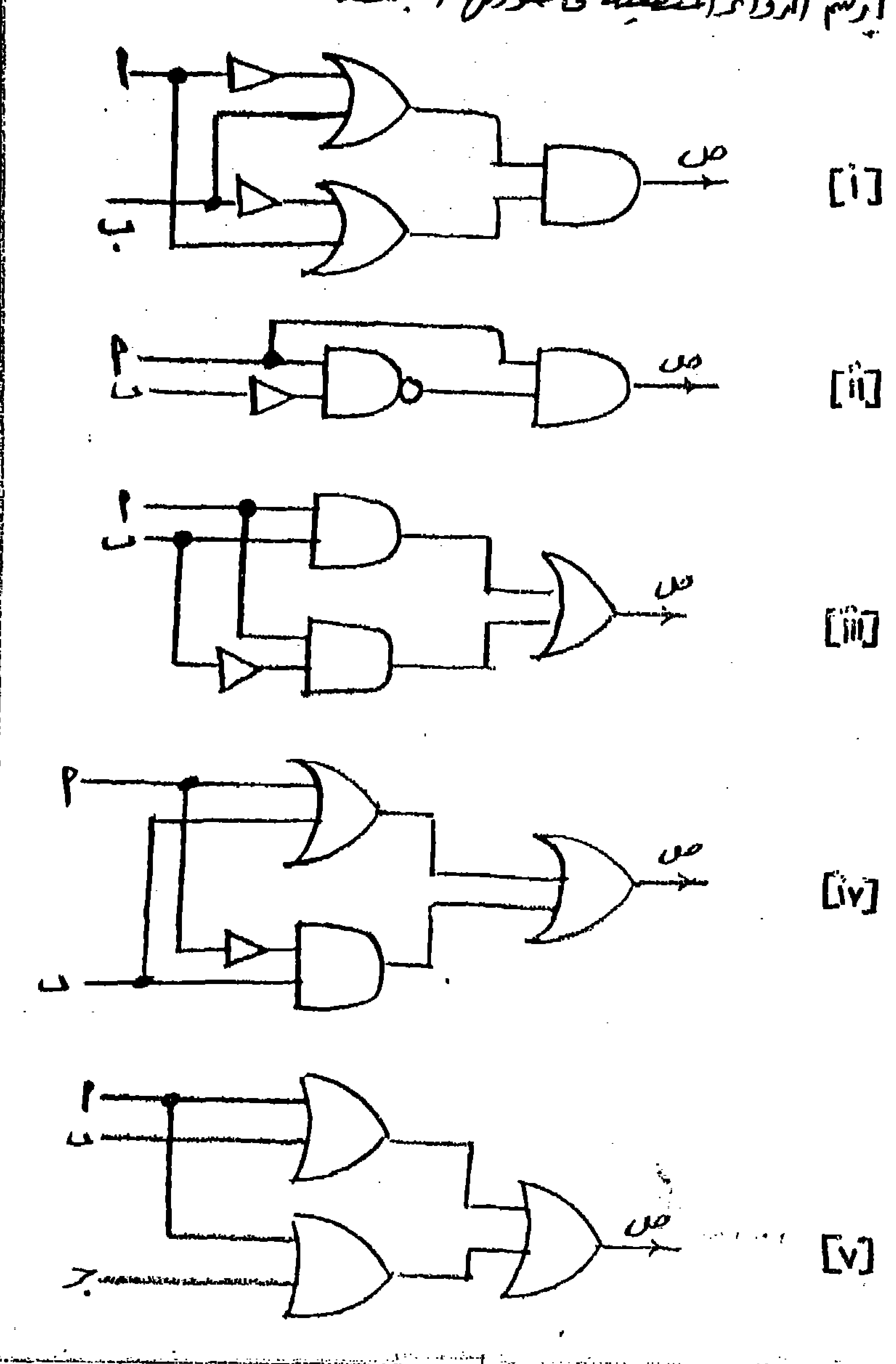
ثم عين متتابعة الخرج لكل منها إذا كانت :

أ = 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0

ب = 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0

جـ = 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1

٩ . أكتب التعبير البولى المناظر لكل من الدوائر المنطقية التالية - ثم استخدم قوانين الجبر البولى فى تبسيط هذه التعبيرات ثم ارسم الدوائر المنطقية فى صورتها المبسطة .



10. ارسم الشكل التخطيطي المنطقي المناظر لكل من التعبيرات البولية التالية :

[i] $\overline{\text{أ} + \text{ب}} \oplus \text{أ} = \text{ص}$

[ii] $\text{أ ب } \overline{\text{جـ}} + \text{أ } \overline{\text{ب}} \text{ جـ} + \overline{\text{أ}} \text{ ب جـ} = \text{ص}$

[iii] $\text{أ } \overline{\text{ب}} + \overline{\text{أ}} \text{ ب} + \overline{\text{أ}}\, \overline{\text{ب}} = \text{ص}$

[iv] $(\text{أ} + \text{ب})(\overline{\text{أ}} + \overline{\text{ب}}) = \text{ص}$

[v] $(\text{أ ب}) \oplus \overline{\text{أ ب}} = \text{ص}$

11. اكتب جدول الصدق المناظر لكل من التعبيرين البوليين :

$$(\text{أ} + \overline{\text{ب}} + \text{جـ}) \cdot (\overline{\text{أ}} + \text{ب} + \overline{\text{جـ}}) = \text{ص}_1$$

$$\overline{\text{أ}} \cdot \text{ب} \cdot \overline{\text{جـ}} + \text{أ} \cdot \overline{\text{ب}} \cdot \text{جـ} = \text{ص}_2$$

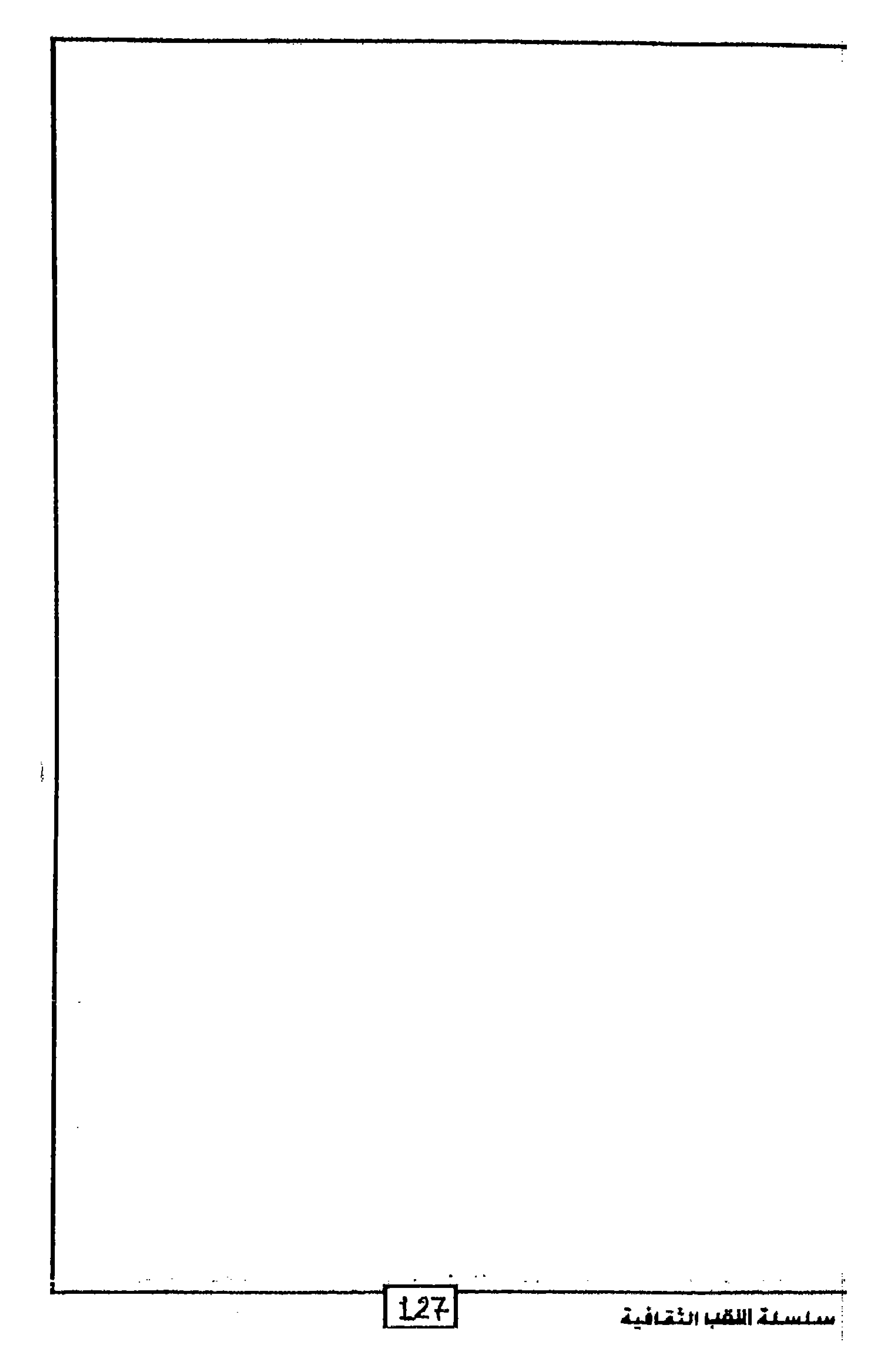
هل $\text{ص}_1 = \text{ص}_2$ ؟ حقق ذلك باستخدام قوانين الجبر البولي . ارسم الدائرة المنطقية المناظرة لكل من هذين التعبيرين البوليين .

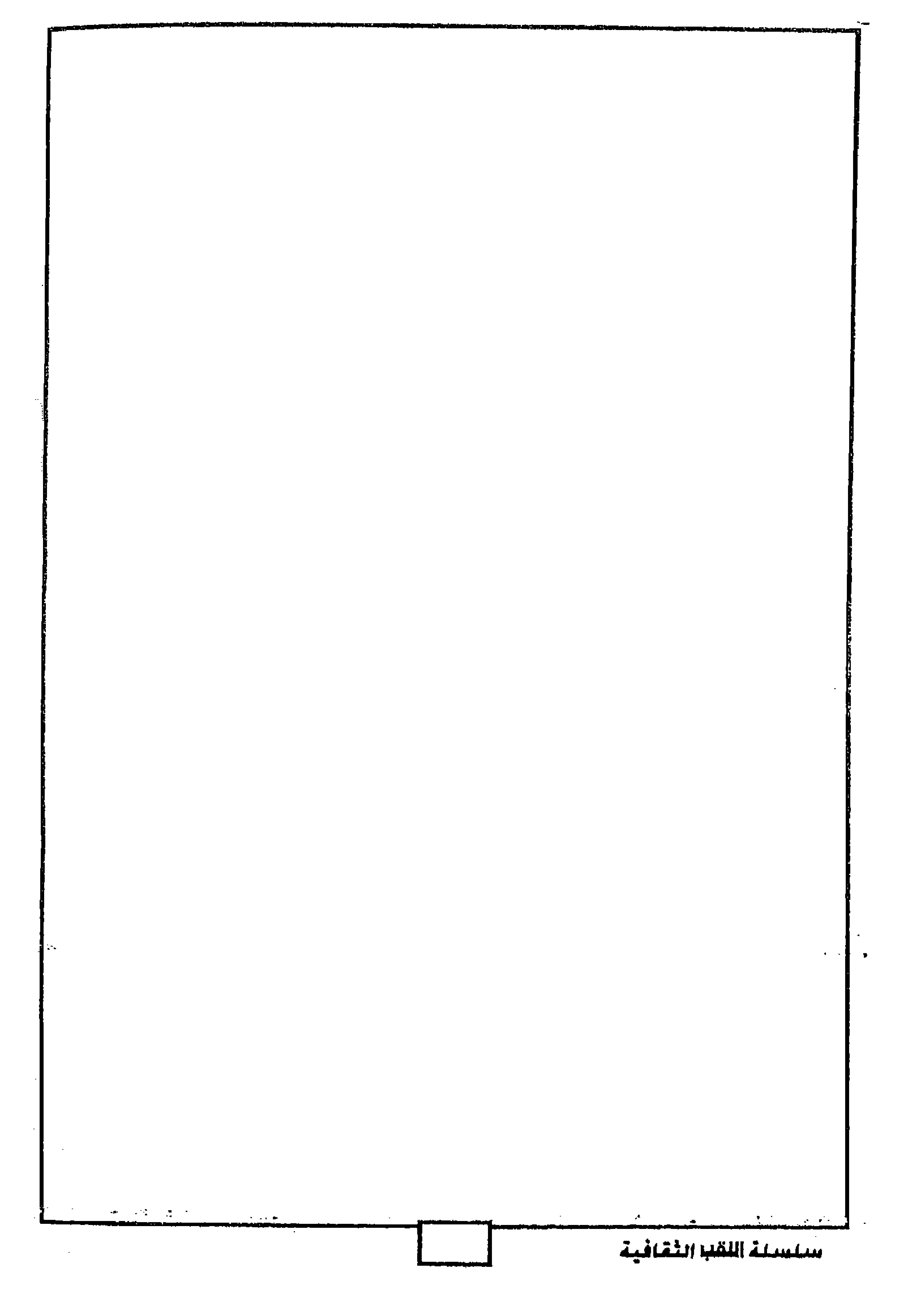
اكتب متتابعة الخرج لكل من الدائرتين إذا كانت :

1 1 1 0 0 0 = أ

1 0 0 0 1 0 = ب

0 1 0 1 0 0 = جـ





سلسلة النقب الثقافية تشمل:

- الأجزاء الخمسة الأولى منها تحت عنوان "بين الحصر و القصر". وهي تهم معلمي الرياضيات عموما
- أما باقي الأجزاء فهي تهم معلمي الرياضيات و طلاب الجامعات عموما
- والأجزاء المستهدفة مبدئيا لهذه السلسلة هي:

الجزء	العنوان
1	في مجال التدريب
2	أنماط رياضية – إنشاءات هندسية – تمارين هندسية
3	في الجبر
4	في التفاضل – حساب المثلثات
5	في الميكانيكا
6	النظم العددية
7	المنطق الرياضي وتطبيقاته
8	المنطق والبرهان الرياضي
9	القطوع المخروطية
10	التحويلات الهندسية (1)
11	التحويلات الهندسية (2)
12	البنية الجبرية (1)
13	البنية الجبرية (2)
14	الهندسة التحليلية الفراغية
15	....